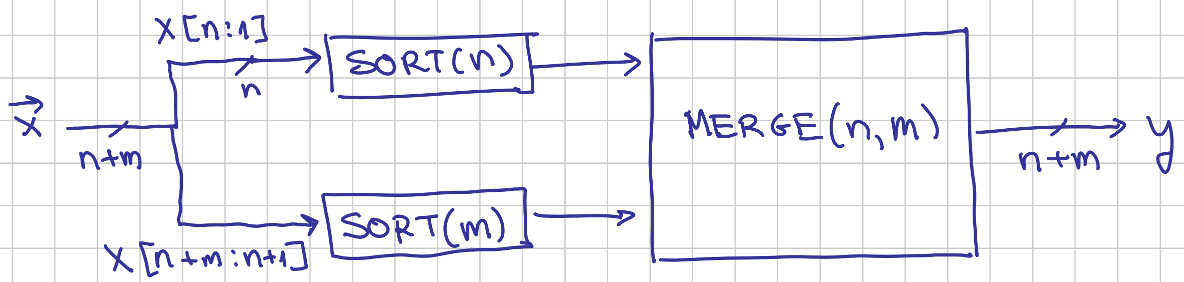
מיון ע"י מיזוג

Batcher's: ODD-EVEN MERGING

6/1/09 קורס מתקדם בתורה
גיל אלון

רשת מיון המבוססת על מיזוג

תיאור רקורסיבי של רשת $SORT(n+m)$:



$SORT(n)$ – ממיין וקטור באורך n.

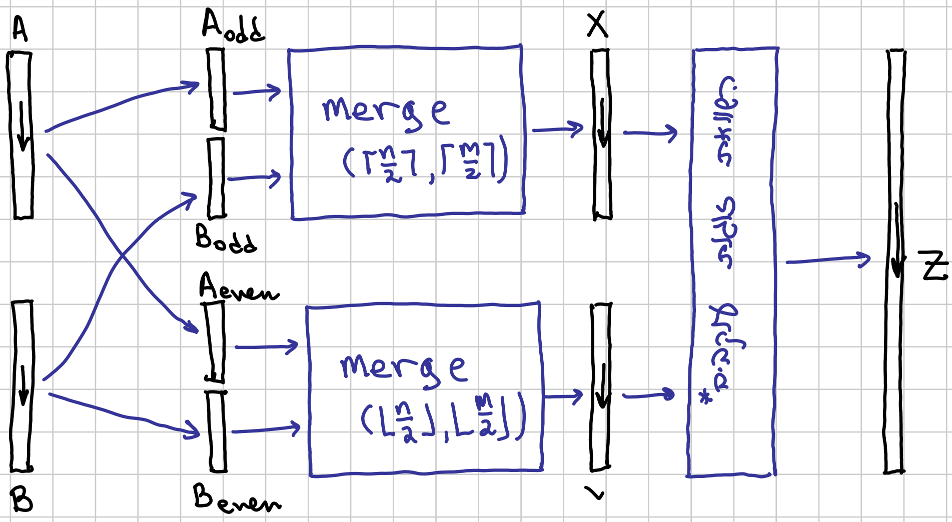
$Merge(n,m)$ – ממזג 2 וקטורים ממויינים, כ"א באורך n.

נכונות: קלה!

איך ממזגים?

רשת מיזוג

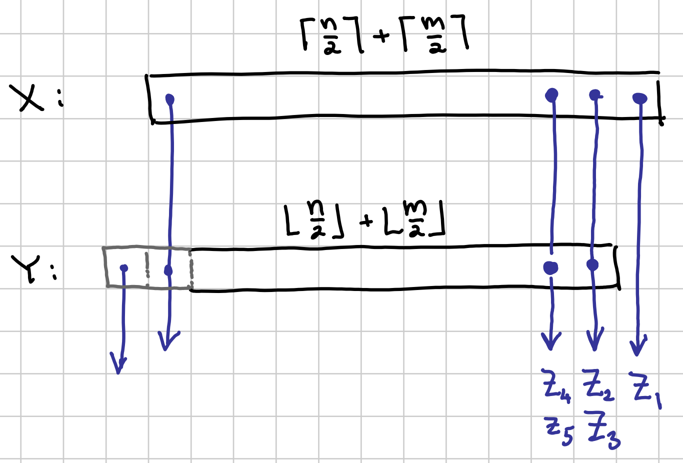
ODD-EVEN MERGE



סימון:

$n = |A|$

$m = |B|$



השוואת שכנים עוקבים:

פרטי המימוש תלויים בהפרש

$$\delta = \lceil \tfrac{n}{2} \rceil + \lceil \tfrac{m}{2} \rceil - \left(\lfloor \tfrac{n}{2} \rfloor + \lfloor \tfrac{m}{2} \rfloor \right)$$

משפט: (עקרון 0-1)

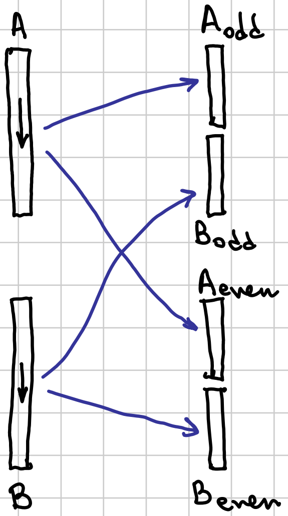
מעגל המיזוג ממזג כל 2 קלטים ממויינים

אמ"מ הוא ממזג כל 2 קלטים בינאריים ממויינים.

הוכחה: שיעורי בית!

טענה: המיזוג merge(n,m) ממיין קלטים בינאריים.

הוכחה: $A \in \{0,1\}^n$, $B \in \{0,1\}^m$.



A ממוין לכן מהצורה $A = 0^a \cdot 1^{n-a}$

כמו כן $B = 0^b \cdot 1^{m-b}$

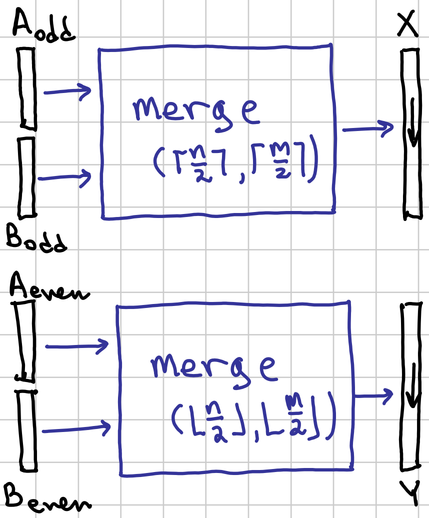
יתרה מזאת

$$A_{odd} = 0^{\lceil \frac{a}{2} \rceil} \cdot 1^{\lceil \frac{n}{2} \rceil - \lceil \frac{a}{2} \rceil}$$

$$A_{even} = 0^{\lfloor \frac{a}{2} \rfloor} \cdot 1^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - \lfloor \frac{a}{2} \rfloor}$$

$$B_{odd} = 0^{\lceil \frac{b}{2} \rceil} \cdot 1^{\lceil \frac{m}{2} \rceil - \lceil \frac{b}{2} \rceil}$$

$$B_{even} = 0^{\lfloor \frac{b}{2} \rfloor} \cdot 1^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor - \lfloor \frac{b}{2} \rfloor}$$



לכן

$$X = 0^{\lceil \frac{a}{2} \rceil + \lceil \frac{b}{2} \rceil} \cdot 1^{\lceil \frac{n}{2} \rceil + \lceil \frac{m}{2} \rceil - \lceil \frac{a}{2} \rceil - \lceil \frac{b}{2} \rceil}$$

$$Y = 0^{\lfloor \frac{a}{2} \rfloor + \lfloor \frac{b}{2} \rfloor} \cdot 1^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lfloor \frac{m}{2} \rfloor - \lfloor \frac{a}{2} \rfloor - \lfloor \frac{b}{2} \rfloor}$$

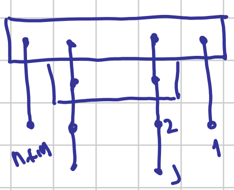
נשים לב כי

$$\delta \triangleq \lceil \tfrac{n}{2} \rceil + \lceil \tfrac{m}{2} \rceil - \left(\lfloor \tfrac{n}{2} \rfloor + \lfloor \tfrac{m}{2} \rfloor \right) = |X| - |Y|$$

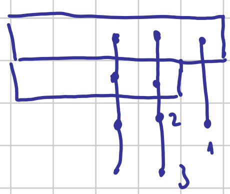
מקיים $0 \le \delta \le 2$.

לכן יש 3 אפשרויות לגבי מצלג השוואות הבצלגת הנקבים:

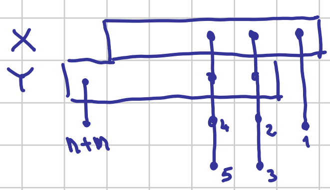
$\delta = 2$



$\delta = 1$



$\delta = 0$

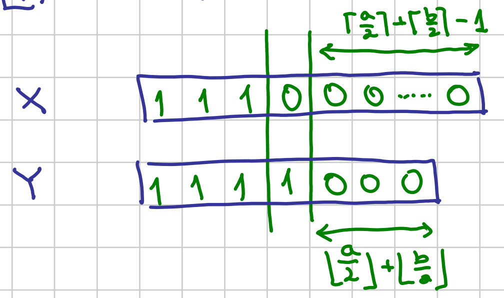


נגדיר $\delta_0 \triangleq \lceil \frac{a}{2} \rceil + \lceil \frac{b}{2} \rceil - \left(\lfloor \frac{a}{2} \rfloor + \lfloor \frac{b}{2} \rfloor \right)$ (הפרש בין אורכי רצף האפסים ב X וב Y)

שוב, $0 \le \delta_0 \le 2$.

בגלל "ההצבה" של X ביחס ל Y במעגל השוואת הזוגות העוקבים מובטח כי יש לכל היותר עמודה 'מעורבת' $\boxed{\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}}$ או $\boxed{\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}}$ אחת.

למשל: $\delta = 1$, $\delta_0 = 2$



משמאל לעמודה המעורבת: כל ה $z_i = 0$.

מימין לעמודה המעורבת: כל ה $z_i = 1$

ולכן min max ממיין את העמודה המעורבת כהלכה. ☒

תרגיל בית:

הוכיחו שבקלט בינארי מתקיימת התכונה הבאה.

לאחר במעגל השוואת הזוגות העוקבים ונדון ב-2 עמודות עוקבות

X_{i+1}	X_i
Y_i	Y_{i-1}

הוכיחו.

$\min\{X_{i+1}, Y_i\} \ge \max\{X_i, Y_{i-1}\}$.

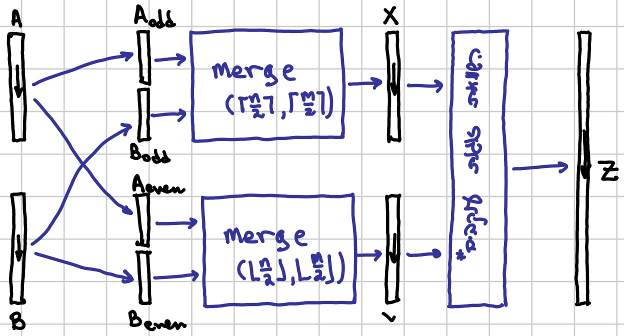
ניתוח מחיר והשהיה של $merge(n,n)$:

$$cost(n,n) \approx 2 \cdot cost\left(\frac{n}{2},\frac{n}{2}\right) + \frac{n}{2}$$

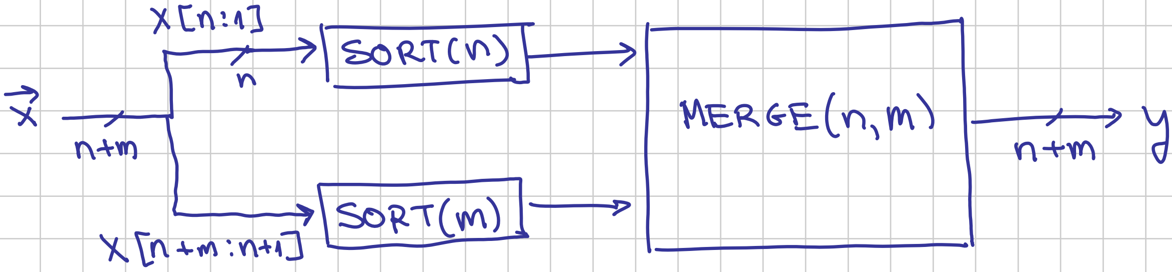
$$\Rightarrow \quad cost(merge(n,n)) = \Theta(n \cdot \lg n)$$

$$delay(n,n) \approx delay\left(\frac{n}{2},\frac{n}{2}\right) + 1$$

$$\Rightarrow \quad delay(merge(n,n)) = \Theta(\lg n)$$



מחיר והשהיה של SORT $(n+n)$



$$cost(Sort(n+n)) = 2\,cost(sort(n)) + cost(merge(n,n))$$
$$= 2\,cost(sort(n)) + \Theta(n \lg n)$$

$$\Rightarrow \quad cost(Sort(n+n)) = \Theta(n \cdot \lg^2 n)$$

$$delay(Sort(n+n)) = delay(Sort(n)) + \Theta(\lg n)$$

$$\Rightarrow \quad delay(sort(n)) = \Theta(\log^2 n).$$

שיעורי בית: הוכיחו נכונות של וריאציה של odd-even merging

Consider a variation of the odd-even merger in which the inputs A, B are connected to the two smaller mergers as follows:

- top merger is input $odd(A)$ and $even(B)$, and
- bottom merger is input $even(A)$ and $odd(B)$.

(a) Suggest a completion of the circuit using a column of comparison boxes fed by the outputs of the top and bottom mergers.

(b) Prove the correctness of the obtained merging circuit.