שיטה א': חיפוש בינארי

n צעדים. (n = מס' הספרות במנה)

בכל צעד מבצעים כפל והשוואה (חיסור).

שיטה ב': חילוק ארוך

n צעדים

בכל צעד מבצעים כפל של B בספרה של המנה וחיסור.

חילוק A/B

① $r \leftarrow \frac{1}{B}$ (הפכי)

② $q \leftarrow r \cdot B$ (כפל)

בעיה: אין לנו $\frac{1}{B}$ ו $\frac{A}{B}$ יוצא בעזרת n סיביות (n אורך המילה).

⇐ מסתפקים בפתרון מקורב: $\left| \frac{A}{B} - q \right| < 2^{-n}$.

הנחה מפשטת: $A, B \in [1, 2)$

מהי השגיאה?

$$\delta_i \triangleq \frac{1}{B} - x_i$$

$$\delta_{i+1} = \frac{1}{B} - x_{i+1} = \frac{1}{B} - x_i(2 - Bx_i)$$

$$= B \cdot \left(\frac{1}{B^2} - 2x_i \frac{1}{B} + x_i^2 \right)$$

$$= B \left(\frac{1}{B} - x_i \right)^2 = B \cdot \delta_i^2 < 2 \cdot \delta_i^2$$

מסקנה: ① לכל $i \geq 1$ $0 < \delta_i$.

② שגיאה יורדת

$$\delta_k \leq 2^{1+2+2^2+\dots+2^{k-1}} \cdot \delta_0^{2^k}$$

$$= 2^{2^k-1} \delta_0^{2^k} = \frac{1}{2}(2\delta_0)^{2^k}$$

אם $|2\delta_0| \leq \frac{1}{2}$ אז מס' ספרות הדיוק "מוכפל" בכל איטרציה:

שיטה 3: ניוטון-רפסון

$$f(x) = \frac{1}{x} - B$$

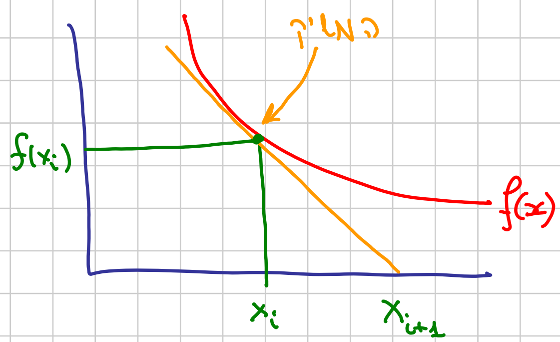
מחפשים שורש של $f(x)$: $f(x)=0 \Rightarrow x = \frac{1}{B}$.

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

$$= x_i - \frac{1/x_i - B}{-1/x_i^2}$$

$$= x_i + x_i^2\left(\frac{1}{x_i} - B\right)$$

$$= x_i(2 - x_iB)$$



$$f'(x_i) = \frac{0 - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

⇐ הכפל בכל איטרציה $x_{i+1} \leftarrow x_i(2 - x_iB)$

מסקנה: אם רוצה לקרב $\frac{1}{B}$ בדיוק 2^{-p} אז

השגיאה תקיים $\delta_k < 2 \cdot 2^{-2^k}$

ומספיק $2 \cdot 2^{-2^k} < 2^{-p}$

כלומר $2^k - 1 > p$

$\Leftarrow$ $2^k > p+1$ $\Leftarrow$ $k > \lg_2(p+1)$

נבחר פשוט $k = \lceil \lg_2(p+1) \rceil$ = מס' איטרציות ניוטון.

$\boxed{\text{הסבר}}$

$$\delta_{i+1} < 2\delta_i^2 \Rightarrow \frac{1}{\delta_{i+1}} > \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\delta_i^2}$$

$$\Rightarrow \log_2 \frac{1}{\delta_{i+1}} > -1 + 2 \cdot \log_2 \frac{1}{\delta_i}$$

איך מחשבים x_0 כך ש $|\delta_0| \leq \frac{1}{4}$?

טענה: אם $x_0 = \frac{3}{4}$ אז $\forall B \in [1,2)\ |\delta_0| \overset{\Delta}{=} \left|\frac{1}{B} - x_0\right| \leq \frac{1}{4}$

הוכחה: $B \in [1,2)$

$\Downarrow$

$\frac{1}{B} \in (\frac{1}{2}, 1]$

$\Downarrow$

$\frac{3}{4}$ נק' אמצע.

פורמלית:
$$\max_{B \in [1,2)} \frac{1}{B} - x_0 \leq 1 - x_0 = \frac{1}{4}$$
$$\min_{B \in [1,2)} \frac{1}{B} - x_0 > \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{4}$$

הוכחה:

$$\mathrm{length}(x_0) = 2$$
$$\mathrm{length}(x_{i+1}) = 2\,\mathrm{length}(x_i) + n$$

ונוכיח באינד': בסיס $i=0$ קל.

$$\mathrm{length}(x_{i+1}) = 2\,\mathrm{length}(x_i) + n$$
$$\overset{(\text{ה.א})}{=} 2\cdot(2^i-1)n + 2^2\cdot 2^i + n$$
$$= (2^{i+1}-1)\,n + 2^{i+1} \quad \boxtimes$$

נצרך $\lceil \lg p+1 \rceil$ איטרציות, ולכן האורך של המספרים יגיע ל

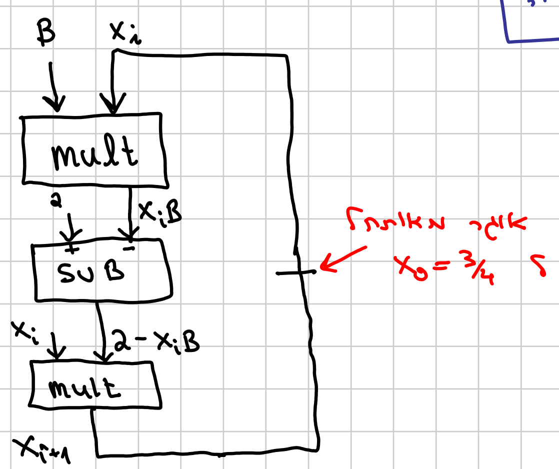
$$\Omega\left(2^{\lg(p+1)}\cdot n\right) = \Omega(p\cdot n)$$

כלומר: דיוק של p ספרות יצריך חישוב על pn ספרות...

לא סביר!

מימוש בחומרה

$$x_0 = \frac{3}{4}$$
$$x_{i+1} \leftarrow x_i(2 - x_iB)$$



בעיה: חישובים x_iB, $2-x_iB$, $x_i(2-x_iB)$

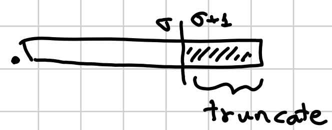
אינם מדויקים.

אילו היו מדויקים אז

$$\mathrm{length}(x_i) = 2\cdot\mathrm{length}(x_{i-1}) + n$$

כאשר $n = \mathrm{length}(B)$

$$= (2^i-1)\,n + 2\cdot 2^i$$

סימון: $\lfloor y \rfloor_\sigma$: 

$$\left(y - 2^{-\sigma} < \lfloor y \rfloor_\sigma \le y \right)$$

ונרצה $\delta_{i+1} \le 2\delta_i^2 + O(2^{-\sigma})$ — חישוב לא מדויק

$\delta_{i+1}^* \le 2\delta_i^2$ — חישוב מדויק

חישובי ביניים של מעוגלים

בכל איטרציה: $x_{i+1} = x_i(2 - x_i B)$

נסמן:

$$Z_i \triangleq \lfloor x_i \cdot B \rfloor_\sigma \qquad Z_i^* \triangleq x_i \cdot B$$

$$T_i \triangleq (2 - 2^{-\sigma}) - Z_i \qquad T_i^* = 2 - Z_i^*$$

$$x_{i+1} \triangleq \lfloor x_i \cdot T_i \rfloor_\sigma \qquad x_{i+1}^* = x_i \cdot T_i^*$$

משפט: אם $\sigma \ge 4$, $x_0 \in (\frac{1}{2}, 1)$, $-\frac{1}{8} < \delta_0 < \frac{1}{8}$

לכל i:

1) $x_i \in (0,1)$

2) $0 < \delta_{i+1} < 2\delta_i^2 + 2 \cdot 2^{-\sigma}$

הוכחה:

$$\delta_{i+1}^* \triangleq \frac{1}{B} - x_{i+1}^*$$

$$\Delta_2 \triangleq x_{i+1}^* - x_i T_i$$

$$\Delta_3 \triangleq x_i T_i - x_{i+1}$$

$$Z_i \triangleq \lfloor x_i \cdot B \rfloor_\sigma \qquad Z_i^* \triangleq x_i \cdot B$$

$$T_i \triangleq (2 - 2^{-\sigma}) - Z_i \qquad T_i^* = 2 - Z_i^*$$

$$x_{i+1} \triangleq \lfloor x_i \cdot T_i \rfloor_\sigma \qquad x_{i+1}^* = x_i \cdot T_i^*$$

ולכן $\delta_{i+1} \triangleq \frac{1}{B} - x_{i+1} = \delta_{i+1}^* + \Delta_2 + \Delta_3$

כבר ראינו $0 \le \delta_{i+1}^* \le 2\delta_i^2$

כעת נחסום את Δ_2, Δ_3 :

$$\Delta_2 = x_i T_i^* - x_i T_i$$
$$= x_i (T_i^* - T_i) \underset{\text{שגיאה של משלים ל-1}}{<} x_i \cdot 2^{-\sigma} \underset{x_i<1}{<} 2^{-\sigma}$$

$$\Delta_3 = x_i T_i - x_{i+1} = x_i \cdot T_i - [x_i T_i]_\sigma < 2^{-\sigma}$$

☒

<u>מסקנה</u>: ניתוח היציבות המספרית של איטרציות ניוטון מאפשרת חישוב לא מדוייק בכל איטרציה מבלי שהשגיאה תגבר!

הדיוק הנדרש $2^{-\sigma}$ בחישובי הביניים אינו גדול בהרבה מהדיוק של התוצאה הסופית!