11/11/08

נושאים מתקדמים בתכנון חומרה

גיא אבן

* מיקבול של מכונת מצבים
* חיבור (אסימפטוטית) אופטימלי (גם בהשהיה וגם במחיר)
* חישוב רישות במקביל

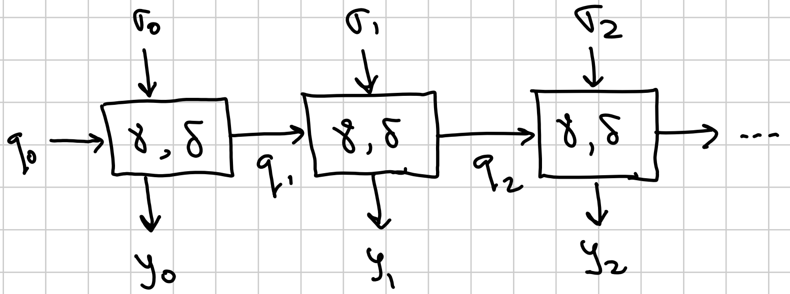
מיקבול של אוטומט סופי עם קלט/פלט

בהינתן סדרת קלט $\{\sigma_i\}_{i=0}^{n-1}$ רוצה לחשב "במהירות"

את סדרת הפלט $\{y_i\}_{i=0}^{n-1}$

כזכור
$$q_{i+1} = \delta(q_i, \sigma_i)$$
$$y_i = \gamma(q_i, \sigma_i)$$

ולכן שקול לבעית שחזור המסלול $q_0 \to q_1 \to \cdots \to q_n$.



שיטה:

מחיר ליניארי

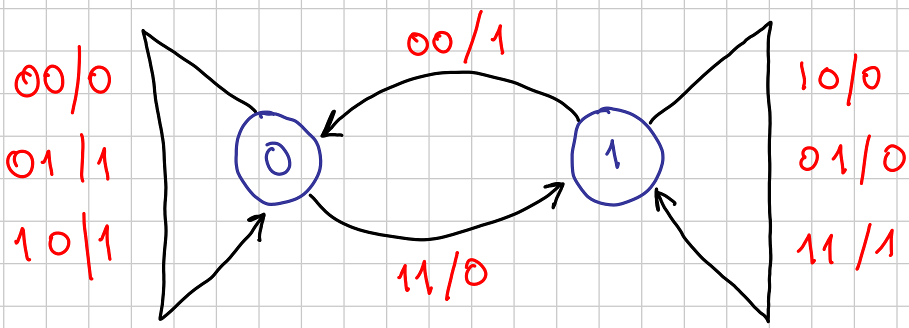
השהיה ליניארית

שאלה: האם קיים מעגל צירופי עם השהיה לוגריתמית שמחשב את $\{y_i\}_{i=0}^{n-1}$?

מהו המחיר הקטן ביותר של כזה מעגל?

שאלה: מניחים $|\Sigma|, |\Delta|$ קבועים. ובכל זאת, איך מחיר / השהיה מושפעים מגדלים אלה?

דוגמה: מחבר סינכרוני ממומש אוטומט סופי עם 2 מצבים.



אם נמקבל, נקבל מימוש צירופי מהיר למחבר צירופי!

מיקבול אוטומט סופי

נחזור למקרה הכללי.

סדרת קלט $\{\sigma_i\}_{i=0}^{n-1}$ מגדירה מסלול בגרף המעברים

$$q_0 \to q_1 \to q_2 \to \cdots \to q_n$$

רוצים לשחזר את המסלול.

נעזר ב-n שחקנים. שחקן i מקבל את σ_i ומנסה
לחשב את חלקו במסלול, כלומר, $q_i \to q_{i+1}$.

<u>בעיה</u>: שחקן i אינו יודע את q_i .....

מה הציעו לדנר ופישר ב 1980 ?

שחקן i מקבל את σ_i ו"בונה" ייצוג של הפונקציה
$\delta_i : Q \to Q$ המוגדרת ע"י $\delta(q, \sigma_i) \triangleq \delta_i(q)$.

נשים לב: $q_1 = \delta(q_0, \sigma_0) = \delta_0(q_0)$

$$q_2 = \delta(q_1, \sigma_1) = \delta_1(q_1) = \delta_1(\delta_0(q_0))$$

ובאופן כללי $q_i = \delta_{i-1}(\delta_{i-2}(\cdots \delta_0(q_0)))$

ולכן אפשר לבקש מה שחקנים להרכיב פונקציות!

הרכבת פונקציות

נניח
$$f : X \to Y$$
$$g : Y \to Z$$

אז $g \circ f : X \to Z$ היא הפונקציה

המוגדרת ע"י $g \circ f\,(x) = g(f(x))$.

במקרה שלנו כל הפונקציות δ_i שוות טווח ותחום $\delta_i : Q \to Q$

ולכן

$$\underbrace{\delta_{i-1} \circ \delta_{i-2} \circ \cdots \circ \delta_0}_{\text{הרכבת פונקציות}} (q_0) = \delta_{i-1}(\delta_{i-2}(\cdots\ \delta_0(q_0))\cdots)$$

שאלה: מה לגבי סוגריים?

$$(\delta_2 \circ \delta_1) \circ \delta_0 = \delta_2 \circ (\delta_1 \circ \delta_0)$$

טענה: הרכבת פונקציות היא אסוציאטיבית

<u>הוכחה:</u> (1) רדוקציה לכפל מטריצות ....

(2) ישיר: $q_0 \xmapsto{\delta_0} q_1 \xmapsto{\delta_1} q_2 \xrightarrow{\delta_2} q_3$

$$\delta_2 \circ (\delta_1 \circ \delta_0)(q_0) = \delta_2((\delta_1 \circ \delta_0)(q_0))$$
$$= \delta_2(\delta_1(\delta_0(q_0)))$$
$$= \delta_2(\delta_1(q_1))$$
$$= \delta_2(q_2) = q_3$$

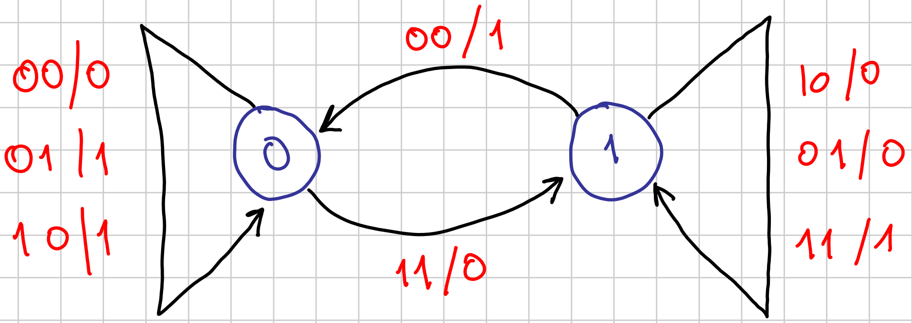
$$(\delta_2 \circ \delta_1) \circ \delta_0 \, (q_0) = (\delta_2 \circ \delta_1) \, (\delta_0(q_0))$$

$$= \delta_2 \circ \delta_1 \, (q_1)$$

$$= \delta_2 (\delta_1 (q_1))$$

$$= \delta_2 \, (q_2) = q_3$$

תזכרה לדוגמה של חיבור!



$$\left.\begin{array}{l} \delta_{00}(q) \equiv 0 \\ \delta_{11}(q) \equiv 1 \\ \delta_{01}(q) = q \\ \delta_{10}(q) = q \end{array}\right] \Longrightarrow$$

מתעניינים ב-3 פונקציות

$$f_0 \equiv 0$$

$$f_1 \equiv 1$$

$$f_{id}(x) = x$$

כעת נרכיב את 3 הפונקציות ; נסמן $F = \{f_0, f_1, f_{id}\}$

$$\forall f \in F : \quad f_0 \circ f = f_0$$

$$\forall f \in F \quad f_1 \circ f = f_1$$

$$\forall f \in F \quad f_{id} \circ f = f$$

ובטבלא

$\circ$	f_0	f_1	f_{id}
f_0	f_0	f_0	f_0
f_1	f_1	f_1	f_1
f_{id}	f_0	f_1	f_{id}

מסקנה : שחקן i מחזיק את $\delta_i \in F$.
ורוצה להעזר בשחקנים האחרים כדי לחשב
את $\Pi_i \triangleq \delta_i \circ \delta_{i-1} \circ \cdots \circ \delta_0$

ואז פשוט

$$q_i = \Pi_{i-1}(q_0)$$

$$y_i = \gamma(q_i, \sigma_i)$$

בעית חישוב הרישות במקביל   parallel prefix problem

קלט: פונקציה אסוציאטיבית $* : F \times F \to F$

סדרה $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{n-1} \in F$

פלט: הסדרה $\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_{n-1} \in F$

המוגדרת ע"י

$$\pi_0 = \delta_0$$

$$\pi_{i+1} = \delta_{i+1} * \pi_i = \delta_{i+1} * \cdots * \delta_0$$

הנחות: (1) "ייצוג" עבור איברי F.

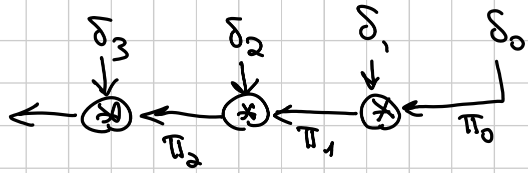
(2) שער צירופי המחשב $*$ $f, g \to \boxed{*} \to f*g$

רוצים מעגל צירופי עם השהיה לוגריתמית ומחיר קטן (לינארי?)

PPC - מימושים לא יעילים

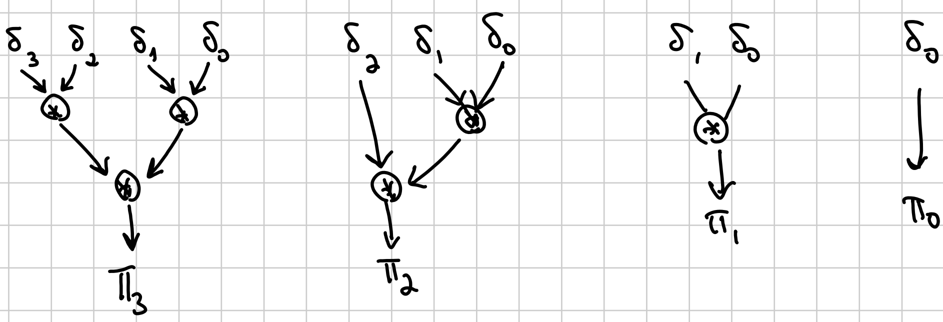
השהיה לינארית

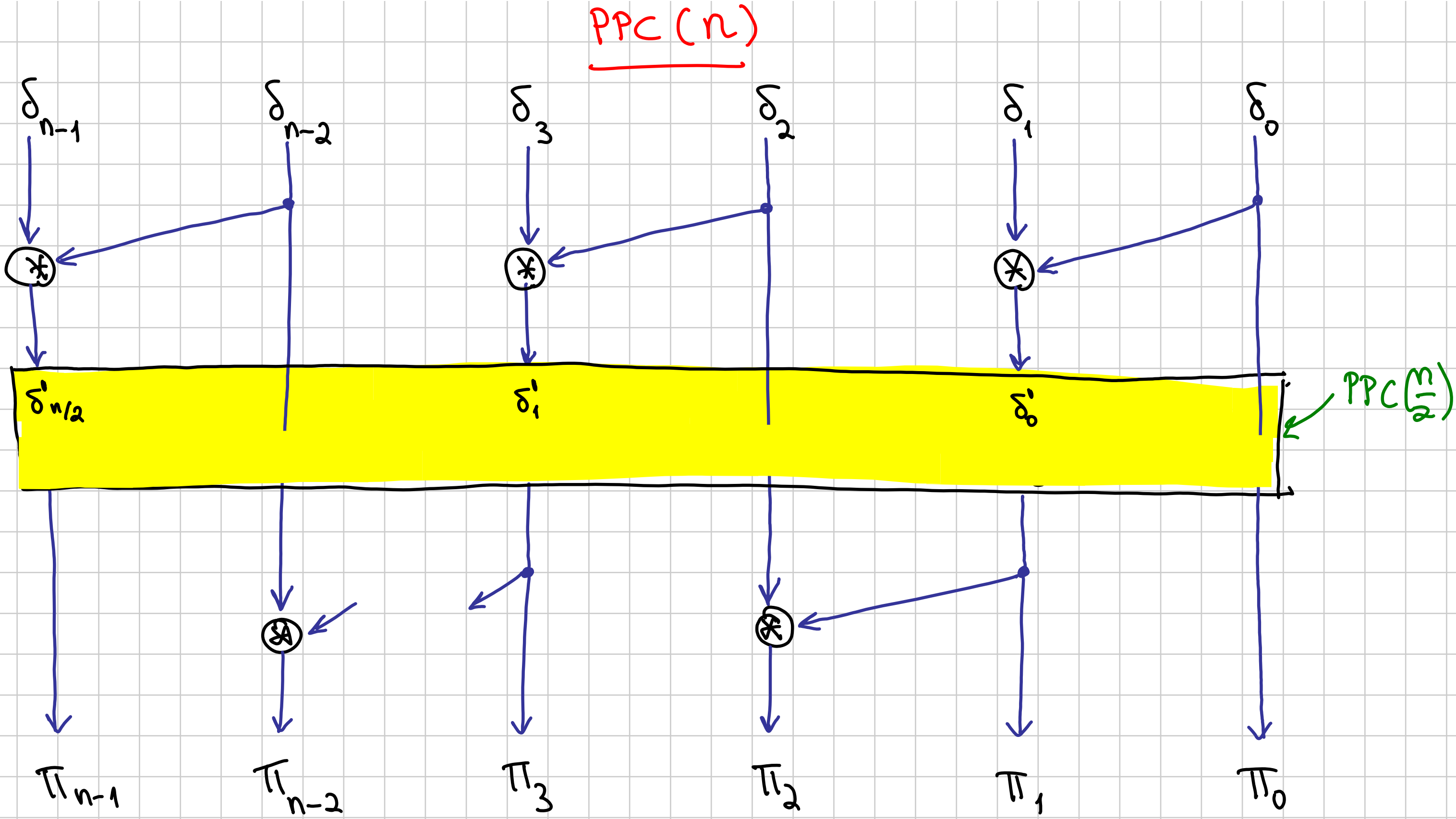
מחיר לינארי

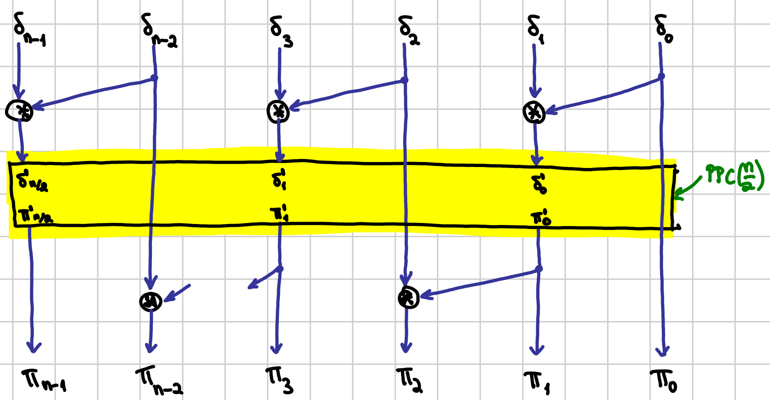


השהיה לוגריתמית

מחיר ריבועי







טענה: $\pi_i = \delta_i * \delta_{i-1} * \cdots * \delta_0$

הוכחה: באינדוקציה על n.

בסיס: $n=1$: $\pi_0 = \delta_0$.

$n=2$ $\quad \pi_0 = \delta_0 \quad \pi_1 = \delta_1 * \delta_0$.

הנחת האינדוקציה: $\pi'_i = \delta'_i * \cdots * \delta'_0$

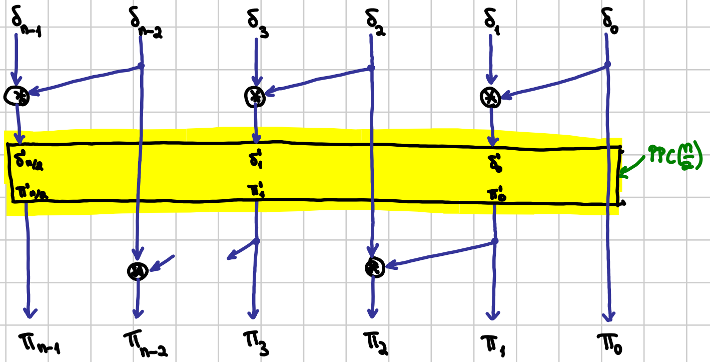
שלב האינדוקציה: עבור i אי-זוגי $(i = 2j+1)$ נקבל

$$\pi_i = \pi'_j = \delta'_j * \delta'_{j-1} * \cdots * \delta'_0$$

$$= (\delta_{2j+1} * \delta_{2j}) * (\delta_{2j-1} * \delta_{2j-2}) * \cdots * (\delta_1 * \delta_0)$$

$$= \delta_i * \cdots * \delta_0$$

עבור i זוגי נקבל $\pi_i = \delta_i * \pi_{i-1} = \delta_i * \cdots \delta_0$. מש"ל



טענה: (נניח $n=2^k$)

$$cost(PPC(n)) = \left(2n-(\lg_2 n+2)\right)\cdot cost(*)$$

הוכחה:

$$c(n) = (n-1)+c(\tfrac{n}{2})$$

$$= (n-1)+(\tfrac{n}{2}-1)+\cdots+(2-1)$$

$$= 2n-2-k$$

טענה:

$$delay(PPC(n)) = (2\cdot\lg n-1)\cdot delay(*)$$

הוכחה:

$$d(n) = 2+d(\tfrac{n}{2}) = 2+2+\cdots+2+\underset{\substack{\uparrow\\ d(2)}}{1} = (\lg n-1)\cdot 2+1$$

תזכורת לחיבור

נכ' הפונק' $F=\{f_0, f_1, f_{id}\}$

הפעולה $*$ היא הרכבה של פונקציות.

איך מייצגים $\delta\in F$?

נשים לב f_0 מתאים δ $A[i],B[i]=00$

f_{id} מתאים δ $A[i],B[i]=01$ או 10

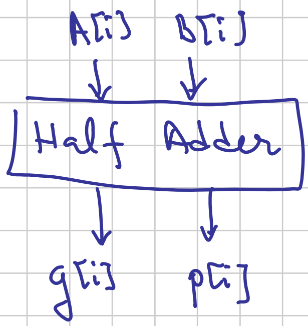
f_1 מתאים δ $A[i],B[i]=11$

בחירה: 2 סיביות

p: $XOR(A[i],B[i])$

g: $AND(A[i],B[i])$

במילים אחרות



הזוג $(g[i], p[i])$ מייצג את $\delta_i \in \{f_0, f_1, f_{id}\}$

מימוש של אופר׳ - $*$:

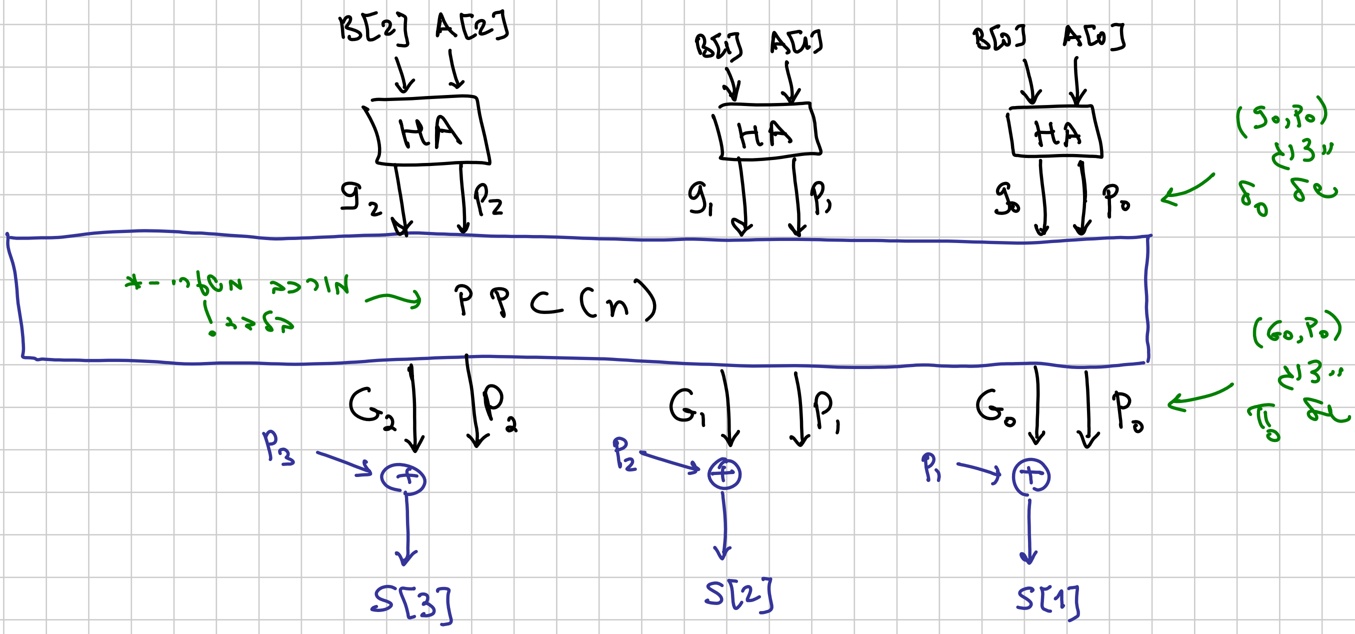
$$(g, p) = (g_2, p_2) * (g_1, p_1)$$

$$g = g_2 \text{ OR } (p_2 \text{ AND } g_1)$$

$$p = p_1 \text{ AND } p_2$$

	$*$	$(0,0)$ f_0	$(1,0)$ f_1	$(0,1)$ f_{id}
$(0,0)$	f_0	f_0	f_0	f_0
$(1,0)$	f_1	f_1	f_1	f_1
$(0,1)$	f_{id}	f_0	f_1	f_{id}

המעגל הסופי לחיבור ע״פ PPC(n)



הסבר: סיבית הסכום $S[i]$ מקיימת

$$S[i] = XOR(q_i, A[i], B[i])$$

$$= XOR(q_i, p_i)$$

$$= XOR(\pi_{i-1}(0), p_i) = XOR(G_{i-1}, p_i)$$

באופן כללי: מיקבול של מכונת מצבים סופי עם קלט/פלט

סדרת קלט $\{\sigma_i\}_{i=0}^{n-1}$, סדרת פלט $\{y_i\}_{i=0}^{n-1}$ וסדרת מצבים $\{q_i\}_{i=0}^{n}$.

$\vec{\sigma}$ ↓

חישוב ייצוג של δ_i	עומק קבוע/מחיר לינ'
↓ $\vec{\delta}$	
$PPC(n)$ עם הרכבת פונקציות	עומק לוג/מחיר לינ'
↓ $\vec{\pi}$	
חישוב של $q_i \leftarrow \pi_{i-1}(q_0)$ לכל i	עומק קבוע/מחיר לינ'
↓ $\vec{q}$	
חישוב של $y_i = \gamma(q_i, \sigma_i)$ לכל i	עומק קבוע/מחיר לינ'
↓ $\vec{y}$	

סה"כ: עומק $O(\lg n)$

מחיר $O(n)$

ומה קורה במכונת מצבים בת $|Q|=S$ מצבים?

למה: כל פונקציה $f:\{0,1\}^k \to \{0,1\}$ ניתנת למימוש

ע"י מעגל צירופי במחיר $\le 2^k \cdot k + k \le O(k \cdot 2^k)$

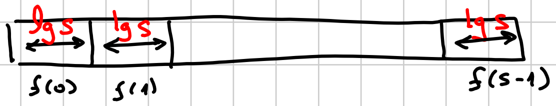
בהשהיה $\le \lg k + k \le O(k)$

מהי התלות של המחיר וההשהיה במספר המצבים $|Q|=s$?

נייצג פונקציות מעבר $f: Q \to Q$ ע"י וקטור $\in Q^s$.

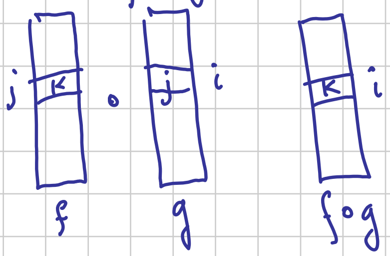
מצריך $s\lceil \lg s\rceil$ סיביות (נניח למשל $Q=\{0,\dots,s-1\}$

וייצוג בינארי של כל מצב).

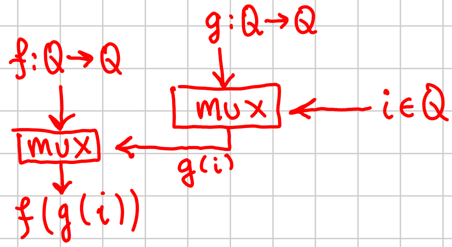


1) בהינתן $\sigma\in\Sigma$ נחשב "ייצוג" של δ_σ $\left\{\begin{array}{l}\text{בזמן } \log|\Sigma| \\ \text{במחיר } s\cdot\log s\cdot|\Sigma|\cdot\lg|\Sigma|\end{array}\right.$

2) שער שמרכיב פונקציות: קלט $f,g: Q\to Q$ פלט $f\circ g$.



חישוב $f(g(i))$



צריך $\lg s$ בוררים מסוג $s:1$. מחיר כל אחד הוא $\Theta(s)$

השהיה כל אחד הוא $\Theta(\lg s)$

$\Leftarrow$ סה"כ מחיר שער הוא

$$\Theta(s\cdot\log s)$$

והשהיה $\Theta(\lg s)$

3) חישוב $q_i=\pi_{i-1}(q_0)$: בזמן קבוע ובמחיר אפס.

4) חישוב $y_i=\gamma(q_i,\sigma_i)$ $\qquad \gamma: \underset{\text{מצב}}{Q}\times\underset{\text{אות קלט}}{\Sigma}\to\underset{\text{אות פלט}}{\Delta}$

במקרה הגרוע: מחיר: $\geq$ מחיר האוטומט

השהיה: $\geq$ השהיית האוטומט (מעגל בודד)

השהיה	מחיר	שלב
$O(\lg\|\Sigma\|)$	$O(n\cdot s\cdot \lg s\cdot\|\Sigma\|\cdot\lg\|\Sigma\|)$	1) חישוב ״ייצוג $\vec{\delta}$
$O(\lg s\cdot \lg n)$	$O(n\cdot s\cdot\lg s)$	2) $PPC(n)$ עם הרכבת פונק׳
$delay(FSM)$	$n\cdot cost(FSM)$	4) חישוב פלט y_i
$O(\lg\|\Sigma\| + \lg\|Q\|\cdot\lg n + delay(FSM))$	$n\cdot O(s\lg s\cdot\|\Sigma\|\lg\|\Sigma\| + s\lg s + cost(FSM)) = n\cdot O(\|Q\|\cdot\|\Sigma\|\cdot\lg\|Q\|\cdot\lg\|\Sigma\| + cost(FSM))$	