30/12/08

מבוא לרשתות מיון

- רשתות min-max
- odd-even sort
- עקרון 0-1

גיא אבן

המטרה: לבנות מעגל צירופי שממיין n איברים

קלט: $x_1, \dots, x_n \in \Sigma^n$

כאשר Σ הוא א"ב עם סדר מלא $\preceq$.

פלט: $x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n)}$ כאשר $\pi : [1..n] \to [1..n]$ פרמוטציה

פונקציונליות: $x_{\pi(1)} \preceq x_{\pi(2)} \preceq \dots \preceq x_{\pi(n)}$.

כרגיל: נתעניין במחיר ובהשהיה של המעגל.

נעבוד במודל ההשוואות.

מודל ההשוואות

הפעולה היחידה המותרת על איברי Σ היא השוואה.
האלגוריתם אינו יכול, למשל, לבדוק חישוב המבוסס על ערכי ביטים ספציפיים בייצוג של איברי הקלט.

חסם תחתון

נדרשות $\Omega(n \cdot \log n)$ השוואות כדי למיין.
הסבר: יש פרמוטציה יחידה π שממיינת. צריך אותה מתוך $n!$ פרמוטציות, כל השוואה מקטינה את קבוצת הפרמוטציות פי 2 לכל היותר, ולכן מס' ההשוואות $\geq \lg_2(n!)$.

מודל מיון המבוסס על אלגוריתם השוואות סדרתי

לא ברור איך להפוך אלגוריתם השוואות למודל צירופי יעיל.

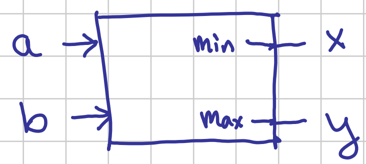
bubble-sort: זמן $\Theta(n^2)$. ← יתן מודל עם השהיה $\Theta(n^2)$

quick-sort: תוחלת זמן ריצה $\Theta(n \lg n)$
במקרה הגרוע $\Theta(n^2)$
לא ברור איך הופכים למודל עם עומק תת-ריבועי.

merge-sort: זמן $\Theta(n \cdot \lg n)$, ונשאלת השאלה האם אפשר לתרגם למודל עם השהיה קטנה.

אבן הבניין - שער min-max

נשתמש רק בשער מסוג min-max



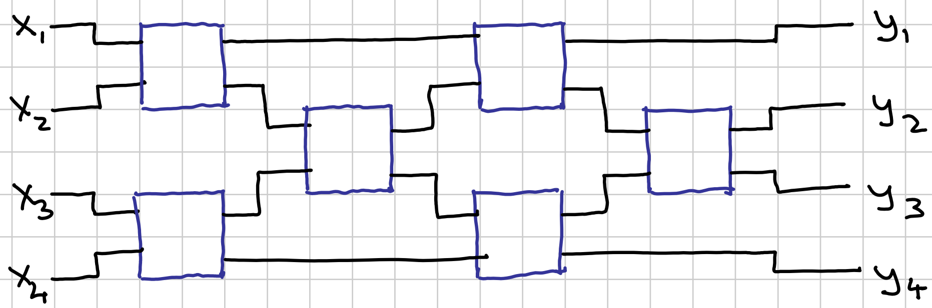
$x = \min\{a, b\}$

$y = \max\{a, b\}$

כמובן: ניתן לממש שער min-max במחיר $\Theta(|\Sigma|)$ ובהשהיה $\Theta(\lg|\Sigma|)$.

כיוון ש-Σ קבוע בדיון הזה, גם המחיר גם ההשהיה של שער min-max הם קבועים

ODD - EVEN SORT



* מעגל זירופי הבנוי משכבות של שערי min-max לסירוגין: שכבה אי-זוגית ושכבה זוגית

* טענה: לכל n קיים L(n) כך שאם יש L(n) שכבות (או יותר), אז הפלט ממוין.

מהו L(n) ?

ODD - EVEN SORT

תאור פורמלי: נסמן את הקלטים x_i ב- x_i^0 ונגדיר $\forall t$: x_i^t.

שכבה אי-זוגית: קלט: $x_1^t, \dots, x_n^t$ (t זוגי)

פלט:
$$x_1^{t+1} = \min\{x_1^t, x_2^t\}$$
$$x_2^{t+1} = \max\{x_1^t, x_2^t\}$$
$$\vdots$$
$$x_{2i-1}^{t+1} = \min\{x_{2i-1}^t, x_{2i}^t\}$$
$$x_{2i}^{t+1} = \max\{x_{2i-1}^t, x_{2i}^t\}$$

עבור $1 \le i \le \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

ולכן אם n אי-זוגי, אז $x_n^{t+1} = x_n^t$.

שכבה זוגית: קלט: $x_1^t, \dots, x_n^t$ (t אי-זוגי)

פלט:
$$x_1^{t+1} = x_1^t$$
$$x_2^{t+1} = \min\{x_2^t, x_3^t\}$$
$$x_3^{t+1} = \max\{x_2^t, x_3^t\}$$
$$\vdots$$
$$x_{2i}^{t+1} = \min\{x_{2i}^t, x_{2i+1}^t\}$$
$$x_{2i+1}^{t+1} = \max\{x_{2i}^t, x_{2i+1}^t\}$$

עבור $1 \le i \le \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$.

ולכן אם n זוגי אז $x_n^{t+1} = x_n^t$.

שיעורי בית:

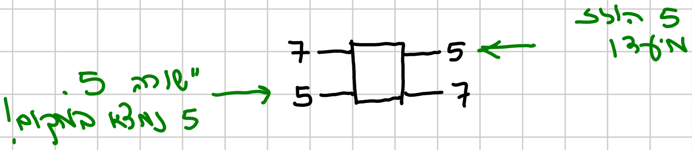
שאלה 1: הראו דוגמה שבה $(n-1)$ שכבות אינן מספיקות

כדי למיין.

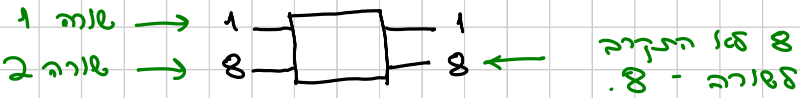
משפט: n שכבות מספיקות כדי למיין.

טעויות בהוכחת המשפט:

* נסיון להוכיח שבכל שכבה כל איבר מתקרב ליעדו - נכשל.



* נסיון להוכיח שבכל שכבה כל איבר רחוק ביותר מיעדו מתקרב ליעדו - גם נכשל.



צריך לחסום את מספר הצעדים ה״מבוזבזים״.

* ננסה לעקוב אחר איבר בודד, אם נצליח להוכיח שהוא מגיע ליעדו, אך נוכיח שהאחרים גם ״מתקדמים״ ליעדם?

קל יותר: פחות "מקרים"
וגם המסלול מונוטוני. מה המוצא
צ'ק

המקרה $\Sigma = \{0,1\}$

נעקוב אחר ה"מסלול" של ה-1 הימני ביותר.

$$j_1 \triangleq \max\{ i : x_i = 1 \}$$

$\boxed{\text{טענה: } \forall t \geq n - j_1 + 1 \; : \; x_n^t = 1}$

משמע: ה-1 הימני ביותר מגיע לסוף כעבור לכל היותר $n-j_1+1$ שכבות.

הוכחה: נוכיח באינדוקציה על $n-j_1$. בסיס: $n-j_1=0$: ברור.

וכעת נוכיח את שלב האינדוקציה.

נפריד בין המקרים j_1 זוגי ו-j_1 אי-זוגי.

אם j_1 אי-זוגי אז $x^1_{j_1+1} = \max\{x_{j_1}, x_{j_1+1}\}$.

ולכן ה-1 "נדחף" ימינה. ולכן

נפעיל את הנחת האינדוקציה $\forall t-1 \geq n-(j_1+1)+1 : x_n^t = 1$

ולכן $t \geq n-j_1+1 \Rightarrow x_n^t = 1$, כנדרש.

אם j_1 זוגי אז $x^1_{j_1} = \max\{x_{j_1}, x_{j_1-1}\}$,

ולכן ה-1 נשאר תקוע במקומו... ואיננו יכולים להפעיל את

הנחת האינדוקציה. מה עושים?

נשים לב שבשכבה $t=2$, ה-1 כן נדחף ימינה, אבל אז

אנו לכאורה יכולים להפעיל את הנחת האינדוקציה רק על 2

שכבות, דבר שיגביל את מס' השכבות ל $n-2$.

תיקון ההוכחה: ראשית, נסמן j_1^t = מיקום ה-1 הימני ביותר בוקטור $\{x_i^t\}_{i=1}^n$. ונוכיח

$$\boxed{\forall\, t \geq n - j_1^{t'} + t' + NXOR(t', j_1^{t'}) \; : \; x_n^t = 1}$$

כאשר: $NXOR(a,b) = \begin{cases} 0 & \text{if } a+b \text{ odd} \\ 1 & \text{if } a+b \text{ even} \end{cases}$

שוב, ההוכחה באינדוקציה על $n - j_1^{t'}$.

בסיס: $n - j_1^{t'} = 0$, ברור.

שלב האינדוקציה: אם $NXOR(t', j_1^{t'}) = 0$ אז $OR \begin{cases} t' \text{ זוגי } \& \; j_1^{t'} \text{ אי-זוגי} \\ t' \text{ אי-זוגי } \& \; j_1^{t'} \text{ זוגי} \end{cases}$

ולכן $x^{t'+1}_{j_1^{t'}+1} = \max\{x^{t'}_{j_1^{t'}}, x^{t'}_{j_1^{t'}+1}\}$

משמע: ה-1 נודד ימינה, כלומר $j_1^{t'+1} = j_1^{t'} + 1$.

לפי הנחת האינדוקציה

$$t \geq n - j_1^{t'+1} + (t'+1) + NXOR(t'+1, j_1^{t'+1}) \Rightarrow x_n^t = 1$$

אבל $j_1^{t'+1} = j_1^{t'} + 1$

$$NXOR(t'+1, j_1^{t'+1}) = NXOR(t', j_1^{t'})$$

ולכן $\forall t: \; t \geq n - j_1^{t'} + t' + NXOR(t', j_1^{t'}) \; : \; x_n^t = 1$

והמקרה השני: $NXOR(t', j_1^{t'}) = 1$ ואז $x^{t'+1}_{j_1^{t'}} = \max\{x^{t'}_{j_1^{t'}}, x^{t'}_{j_1^{t'}-1}\}$,

וה-1 אינו נודד ימינה.

אבל בשכבה $t'+2$ מתבצעת נדידה ימינה.

ולכן אפשר להפעיל את הא"ה עבור $t'+2$:

$$\forall t \geq n - j_1^{t'+2} + (t'+2) + \cancel{NXOR(t'+2, j_1^{t'+2})} : \quad x_n^t = 1$$

$$\forall t \geq \underbrace{n - (1 + j_1^{t'}) + t' + 2 + 0}_{= n - j_1^{t'} + t' + NXOR(t', j_1^{t'})} : \quad x_n^t = 1$$

והשלמנו את צעד האינדוקציה.

תכונות של המעגל

מתוך ההוכחה עולה שה-1 הימני ביותר "ממתין" לכל היותר שכבה אחת באותה השורה. אחרי זה גם ב"דיבוקים" לעבר יעדו, עד שמגיע לשורה ה-n.

הכללת הטענה עבור כל ה-1-ים

נסמן: j_i - המיקום של ה-1 ה-i בקלט.

טענה: $x^{t}_{n-(i-1)} = 1$: $t \ge \underbrace{n-(i-1)-j_i}_{\text{"מרחק יעד"}} + \underbrace{i}_{\text{"זמן המתנה"}}$

כלומר, ה-1 ה-i מגיע ליעדו בהתאם לתחום.

נשים לב $n-(i-1)-j_i+i = n+1-j_i \le n$

ולכן n שכבות מספיקות למיון.

איך מוכיחים את הטענה?

(*) נרחיב את הטענה לגבי המתנה + תנועה רציפה ליעד

לגבי שאר ה-1-ים. דהיינו:

- המתנה של לכל היותר i שכבות באותה השורה.
- תנועה רציפה למעבר היעד (השורה $n-(i-1)$).

איך חוסמים את ההמתנה?

נטען (באינדוקציה על i) שה-1 ה-i ממתין לכל היותר i שכבות.

בסיס: עבור $i=1$ - הוכח למעשה כבר.

שלב: מרגע ש-1 ה $(i-1)$ מתחיל לנוע, הוא אינו "נפגש" יותר עם ה-1 ה-i (אלא אם כן הגיע ליעד).

וה-1 ה-i ממתין לכל היותר עוד שכבה אחת.

איך מוכיחים תנועה רציפה:

אין התנגשות עם מעגל של 1 ה $(i-1)$.

לכן עד בעצביות עם ציוד (השורה ה $n-(i-1)$).

המקרה הכללי: Σ כלשהו (עם סדר מלא)

נשתמש במשפט הבא:

משפט (עקרון 0-1)

אם רשת של שערי min-max ממיינת סדרות קלט מעל $\{0,1\}$,
אז היא ממיינת סדרות קלט מעל $\Sigma=\mathbb{R}$.

מסקנה: רשת זוגי-אי-זוגי ממיינת כהלכה

איך מוכיחים את המשפט?

למה: אם N היא רשת הבנויה משערי min-max

לא יורדת

ואם $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ היא פונק' מונוטונית ($x\ge y \Rightarrow f(x)\ge f(y)$).

אז לכל $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$, מסלול הניתוב של N עם קלט $\vec{x}$

זהה למסלול הניתוב של N עם קלט $(f(x_1),\dots,f(x_n))$.

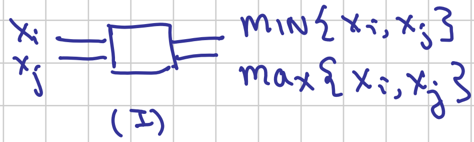
הלמה בעצם אומרת שלכל שער G, המצב של G עם קלט חיצוני $\vec{x}$ שווה למצבו עם קלט חיצוני $f(\vec{x})$.

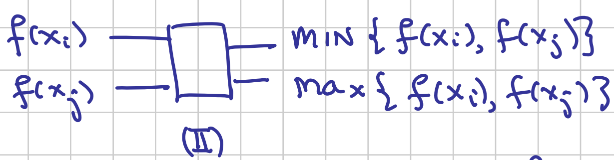
הערה: אם $f(x_i)=f(x_j)$ אז 2 המצבים של קופסת ההשוואה מותרים (swap / no swap). נבחר במצב לפי מצב קופסת ההשוואה עבור הקלטים x_i, x_j.

הוכחת הלמה: נוכיח באינדוקציה על "העומק" של N - כלומר, אורך המסלול הארוך ביותר מקלט חיצוני לפלט חיצוני.

אורך $=0$: ברור כי אין שערי min-max.

אורך $=1$:





אם $f(x_i)=f(x_j)$ אז בתמונה II "נחקה" את המצב בתמונה I.

אם $f(x_i)\neq f(x_j)$ אז מונוטוניות $f \Leftarrow$

$$x_i<x_j \iff f(x_i)<f(x_j)$$

ולכן בשתי התמונות מצב שער min-max זהה.

שלב האינדוקציה: נגדיר N_1 = כל השערים שכל קלטיהם הם קלטים חיצוניים.

$N_2 = N \setminus N_1$ מקבלת פירוק של N:

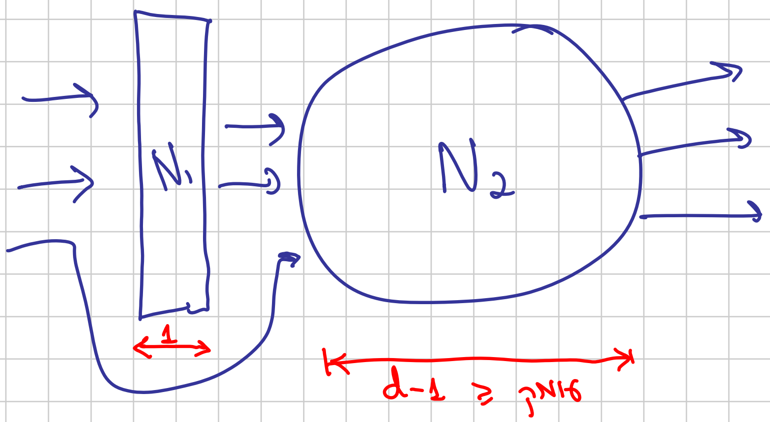
נסמן:

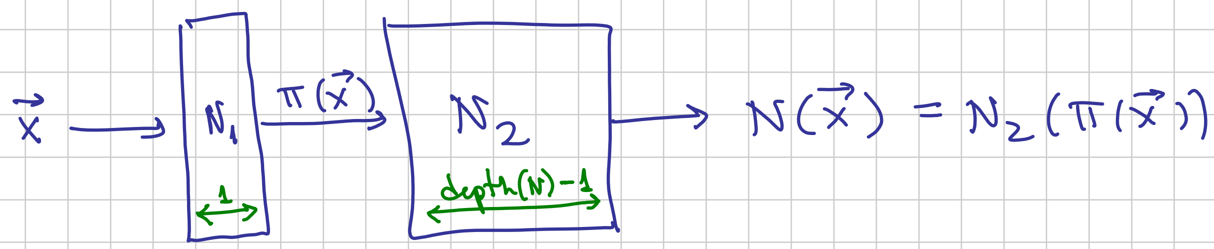
d = עומק של N

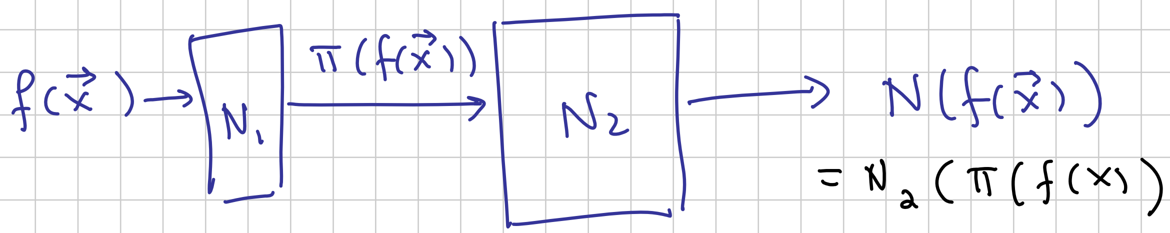
אז

עומק של $N_1 = 1$

עומק של $N_2 = d-1$.







כדי להפעיל את הנחת האינדוקציה על N_2 צריך להוכיח

$$f(\pi(x)) = \pi(f(x))$$

וזה קל כי N_1 "בעומק" 1.

למה: אם N היא רשת הבנויה משערי min-max ואם $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ היא פונק' מונוטונית $(x \geq y \Rightarrow f(x)\geq f(y))$.
אז לכל $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$, מסלול הריצה של N על קלט $\vec{x}$
זהה למסלול הריצה של N על קלט $(f(x_1),\dots,f(x_n))$.

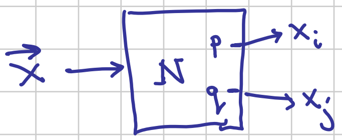
מסקנה: $N(f(x)) = f(N(x))$

משפט (עקרון 0-1)

אם רשת של שערי min-max ממיינת סדרות קלט מעל $\{0,1\}$,
אז היא ממיינת סדרות קלט מעל $\Sigma=\mathbb{R}$.

הוכחה:

בדרך השלילה. נניח $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$ מקיים $N(\vec{x})$ לא ממוין.
אז יש מוצאים $p<q$ שמכילים x_i ו-x_j בהתאמה
עבורם $x_i \gneq x_j$.



נגדיר $f(\alpha)=\begin{cases}0 & \text{if } \alpha < x_i\\ 1 & \text{if } \alpha \geq x_i\end{cases}$ ← f כמובן מונוטונית? לא יורדת

$f(\vec{x})\in\{0,1\}^n$, ולכן $N(f(\vec{x}))$ ממוין.

הוכחנו $N(f(\vec{x})) = f(N(x))$ לכן נקבל

$$\begin{pmatrix} \text{במקום} \\ \text{ה } p \end{pmatrix} \quad f(x_i) = 1$$

$$\begin{pmatrix} \text{במקום} \\ q \end{pmatrix} \quad f(x_j) = 0$$

$f(N(\vec{x}))$ לא ממוין.

סתירה.

<u>שיעורי בית</u>

(2) הציגו אלג' סיסטולי למיון n מספרים (בהתחלה תא i מחזיק את x_i).

רמז: טרנספורמציית מקום - זמן.