

6/11/08

אלגוריתמים ברשתית - 2008

ע"ש אלפן

- תכנית עינאכי (צורה מטריצונית)
- בלתי כסני ואיננה
- צוגמאות: כסני קבוצות, זכיתה מקט', תתק מינ'.

## התכנית הצואלית

Primal

$$\begin{aligned} & \min c^t \cdot x \\ (P) \quad & \text{st.} \\ & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

$$c \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m$$

Dual

$$\begin{aligned} & \max y^t \cdot b \\ (D) \quad & \text{st.} \\ & y^t A \leq c^t \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

הזרות: (1)  $A \in M_{m \times n}$  מטריצת האיזונים.

(2)  $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$  משתנים.

(3) זוהי בחירה ספציפית של איזונים (נחה להמשך השיעור). יתכנו איזוני שיוויון/איזוני סימן שלמים.

## משפט הזוגיות (צורה מאובחנת)

אם  $P$  ו- $D$  פריביליות, אז

$$\min\{c^t x \mid Ax \geq b, x \geq 0\} \geq \max\{y^t b \mid y^t A \leq c^t, y \geq 0\}$$

הוכחה: יהיו  $x$  פתרון פריבילי עבור  $P$   
 $y$  פתרון פריבילי עבור  $D$   
נוכיח כי  $c^t x \geq y^t b$

$$c^t x \geq (y^t A) \cdot x = y^t \cdot (Ax) \geq y^t \cdot b$$

כי  $x \geq 0$  וכן  $A^t y \geq c^t$

כי  $y \geq 0$  וכן  $Ax \geq b$

$OPT(P) = -\infty \Rightarrow$   $D$  לא פריבילי

נסתקף:

$OPT(D) = +\infty \Rightarrow$   $P$  לא פריבילי

הערה: בצורה החזקה משפט הזוגיות נלמד שמתקיים **סימיון**!

## בעיות כוסו ואינרטי

צוגמאות לבנת כוסו:

- Set Cover. השתמש בקבוצות של מנת לכסות אברים.

- vertex cover. השתמש בצמתים של מנת לכסות קשתות.

צוגמאות לבנת אינרטי:

- matching. אינרטי קשתות כן שכל צומת יהיה נק' קצה של קשת אמת עם היותר.

- זרימה ברשתות. אינרטי מלגל זרימה כן שלפאוק כל קשת, כמות הזרימה על תהיה מהקובל.

# כיסוי ואינדיקה

## דוגמה:

בעלת כיסוי יש אברים מכסים ואברים עם זרימה כיסוי.  
 משתמשים באברים המכסים כדי לעסות אברים עם זרימה.  
 המטרה: מינימום אברים מכסים. בעלת כיסוי הן בליטה  
 מינימום.

בעלת אינדיקה יש אברים שניתן לבנות ומתארים שניתן לבנות.  
 לכל מתאב יש קיבול שאורו עוזר לנו.  
 המטרה: מקסימום אברים באינדיקה.

## הזרמה של בעלת כיסוי ואינדיקה באמצעות תכנון בשלבים

כיסוי (Primal) אינדיקה (Dual)

$$\min c^t x$$

s.t.

$$Ax \geq b$$

$$x \in \{0,1\}^n$$

$$\max y^t b$$

s.t.

$$y^t A \leq c^t$$

$$y \in \{0,1\}^m$$

הפרטים:

① בעליות כיסוי ואינדיקה, כל רכיבי  $A, b, c$  הם שלבים.

②  $c$  - וקטור קיבולים

$b$  - וקטור זרימות כיסוי

$A_{ij}$  - מידת אינדיקה ה- $i$  מכסה את ה- $j$ .  
 מידת אינדיקה ה- $i$  מכסה את ה- $j$ .

סיניארי

הצרכה של בעיות סינוי ואיננה באמצעות תכנון ~~באלגוריתם~~

(Primal) סינוי

(Dual) איננה

$$\min c^t x$$

$$\max y^t b$$

s.t.

s.t.

$$Ax \geq b$$

$$y^t A \leq c^t$$

~~$x \in \{0,1\}^n$~~   
 $x \geq 0$

~~$y \in \{0,1\}^m$~~   
 $y \geq 0$

הערות:

① בעיות סינוי ואיננה, כל הניכוי  $A, b, c$  על  $\mathbb{R}$ .

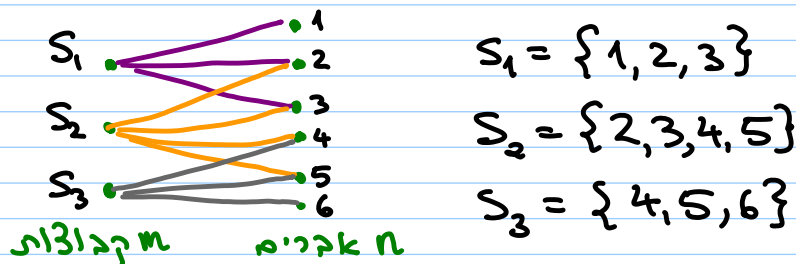
②  $c$  - וקטור קיבולים

$b$  - וקטור זרימות סינוי

$A_{ij}$  - מידת הסינוי  $j$  -  $i$  מכסה את  $i$ .  
מידת הקיבול  $i$  -  $e$  תאם  $b - j$ .

### סינוי ואיננה : Set Cover

ניצג את הקבוצות והאברים  $\vec{1}$   $n$  -  $1, 2, 3, 3, 3$ :



המטריצה  $A \in M_{n \times m}$  מכילה שורה  $i$  עם אברי  $i$  ומחזרה  $i$  קבוצה

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } i \in S_j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

דפן מופד של SC ניתן להצרכה באופן הבא  
$$\min \{ c^t x \mid Ax \geq \vec{1}, x \in \{0,1\}^m \}$$

נחיה את אילו צי הסמכות  $\{0,1\}^m$  באמצעות  $x \geq 0$  ונקבל תכנית סיניארי.



כיסוי ואיננה: צומחה מכימה מקסימום ברשת

רשת מכימה מתוארת על ידי:

$G = (V, E)$  : גרף מכוון  
 $s, t \in V$  : מקור ובורג בגרף.  
 $c: E \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$  : קיבול קשתות.

נסמן:  $P = \{p_1, p_2, \dots\}$  - קב' כל המסלולים המכוונים  $s$ - $t$ .

מכימה: כונק'  $f: P \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$  המקיימת:  $\forall e \in E: \sum_{\{p \mid e \in p\}} f(p) \leq c(e)$

כמות המכימה המוצרמת על ידי  $f$ :  $|f| \stackrel{\Delta}{=} \sum_{p \in P} f(p)$

המטרה: למצוא מכימה מקסימום ברשת.

כיסוי ואיננה: צומחה מכימה מקסימום ברשת (המשק)

$\max f^t \cdot \vec{1}$   
 s.t.  
 $f^t A \leq c$   
 $f \geq 0$

תכנית  
קמפניה  
של  
תכנית  
צומחית

התכנית העינארית המתוארת היא:

כאשר  $A \in M_{|P|, |E|}$  (שורה  $i$  מכילה מסלול  $p_i$ )

ועמנה  $c$  קשת).

הרכיב  $A_{ij}$  מוגדר כך:

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } e_j \in p_i \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

מהי התכנית הבריחית?  $\min \{c^t x \mid Ax \geq \vec{1}, x \geq 0\}$

מה המשמעות הקומבנטורית? נחליף את איננה בסמן באיננה שלמות

ואז  $x(e) \in \{0, 1\}$  !  $Ax \geq \vec{1}$  אומר: בכל מסלול יש קשת

עם  $x(e) = 1$ . כלומר,  $\{e \mid x(e) = 1\}$  מהווה חתך בין  $s$

ל- $t$ .

## צפייה מקסימלית ונתק מינימום

ראינו שהתכנית הפתוחה מתאמה עם נתק מינימום, (התכנית הצואלית מתאמה עם צריחה מקסימלית).

משפט הצואליות (צורה חלשה)  $\Leftrightarrow$

$$\text{קיומו של נתק (לבור)} \geq \text{כמות צריחה מקסימלית}$$

ואנחנו יוצאים כבר למאן שיש שיוויין ...