Note Title

אלגוריתמים ברשתות - 10/11/08

10/25/2006

זרימה מקסימום ברשתות

רשת זרימה $N=\langle G, s, t, c\rangle$

- גרף מכוון $G=(V,E)$
- מקור $s\in V$ ובור $t\in V$
- קיבולים $c: E \to \mathbb{R}^{\geq 0}$

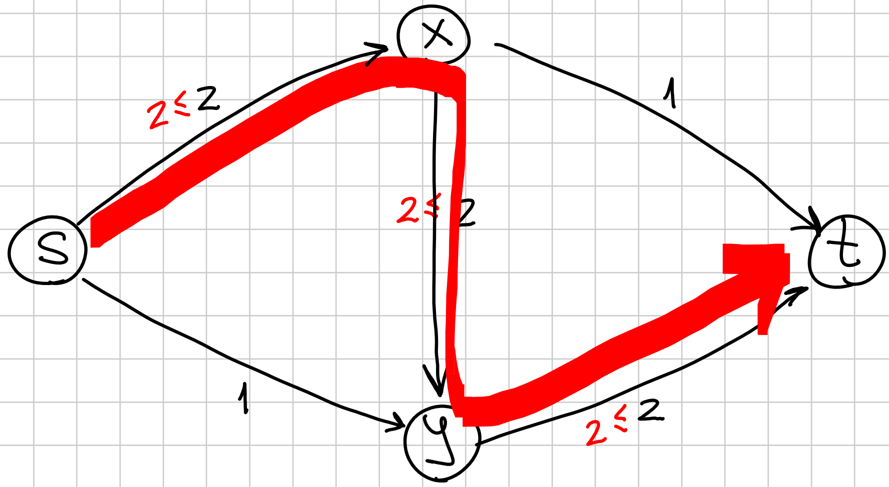
זרימה פיזיבילית: $f: E \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ המקיימת

$\forall e\in E: \quad 0 \le f(e) \le c(e)$ [אילוץ קיבול]

$\forall v\in V\setminus\{s,t\}: \quad \sum_{e\in IN(v)} f(e) = \sum_{e\in out(v)} f(e)$ [אילוץ שימור זרימה]

כמות הזרימה $|f|$: $|f| \triangleq \sum_{e\in out(s)} f(e) - \sum_{e\in IN(s)} f(e)$

דוגמא



הגדרה בעזרת זרימת מסלולים:

$P \triangleq$ קב' כל המסלולים המכוונים (הפשוטים) מהמקור s לבור t.

זרימה: $f : P \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ המקיימת

$\forall e \in E : \sum_{\{p\in P \mid e \in p\}} f(p) \leq c(e)$ [אילוץ קיבול]

הערות: (1) אין צורך באילוץ שימור זרימה.

(2) מספר המשתנים עלול להיות אקספ'.

(3) נדרשת הוכחה לשקילות...

הגדרה שלישית (Sleator)

1) נרחיב את פונק' הקיבולים לכל זוגות הצמתים $c: V\times V \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ כאשר $c(v,w)=0$ אם $(v,w)\notin E$.

2) זרימה היא פונקציה $f: V\times V \to \mathbb{R}$ המקיימת

א. [illegible]: $\forall (v,w)\in V\times V:\ f(v,w)\leq c(v,w)$

ב. [illegible]: $\forall (v,w)\in V\times V:\ f(v,w)=-f(w,v)$

ג. [illegible]: $\forall v\in V\setminus\{s,t\}:\ \sum_{u\in V} f(u,v)=0$

כמות הזרימה $|f| \triangleq \sum_{v\in V} f(s,v)$.

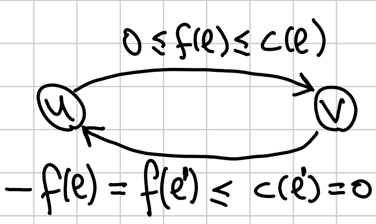
מוכר?

א. [illegible]: $\forall (v,w)\in V\times V:\ f(v,w)\leq c(v,w)$

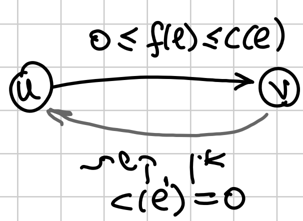
ב. [illegible]: $\forall (v,w)\in V\times V:\ f(v,w)=-f(w,v)$

ג. [illegible]: $\forall v\in V\setminus\{s,t\}:\ \sum_{u\in V} f(u,v)=0$

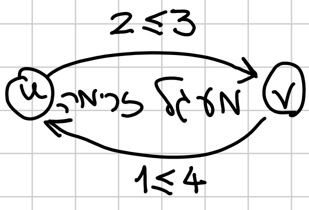
Sleator



סבצרב'



לא יתכנו מעגלי זרימה באורך 2



שיעורי בית: (שקילות של הגדרות)

הראו כיצד ניתן לתרגם כל זרימה סטנדרטית

לזרימה לפי Sleator, ולהיפך.

מושגים

קשת רוויה: אם $f(e) = c(e)$

כמות זרימה: $|f| = \sum_{v \in V} f(s,v)$

זרימה מקסימום:

f זרימה מקסימום אם לכל זרימה f' מתקיים: $|f| \geq |f'|$.

זרימה מקסימלית:

f זרימה מקסימלית אם בכל מסלול מכוון מהמקור s לבור t יש קשת רוויה.

מושגים - המשך

חתך: עלם $V \supsetneq S$ מקיים $s \in S$ וכן $t \notin S$

אוסף הקשתות המושרה ע"י S הוא

$$\delta(S) \triangleq \{(v,w) \in V^2 \mid v \in S \ \&\ w \notin S\}$$

קיבול חתך:

$$c(S) \triangleq \sum_{(v,w) \in \delta(S)} c(v,w)$$

כמות זרימה בקבוצת קשתות: עלם $F \subseteq E$ נגדיר $f(F) \triangleq \sum_{e \in F} f(e)$.

זרימה נטו בחתך: $f(\delta(S))$.

תכונות קלות

1. האם: f זרימה מקסימלית $\Leftarrow$ f זרימה מקסימום?
2. $f(\delta(\{s\})) = |f|$.
3. לכל 2 חתכים S_1, S_2: $f(\delta(S_1)) = f(\delta(S_2))$
   ובפרט: $|f| = f(\delta(S_1))$
4. לכל חתך S: $f(\delta(S)) \leq c(S)$
   מתי יש שוויון?
5. במילים אחרות: מה אומר 4?

עוד תכונות קלות

⑥ מעגל זרימה: מסלול מעגלי ב-G שבכל קשת לאורכו יש זרימה חיובית.

⑦ ניתן להיפטר ממעגלי זרימה: אם ב-N יש זרימה $f: E \to \mathbb{R}^{\geq 0}$, אז קיימת זרימה $g: E \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ המקיימת:

(א) $|g| = |f|$

וגם (ב) g אינה מכילה מעגלי זרימה.

⑧ אם $f, g, f+g$ זרימות ב N אז
$$|f+g| = |f| + |g|$$

עוד תכונות קלות

⑨ אם f זרימה חוקית וכן $|f| > 0$ אז קיים מסלול p מהמקור s לבור t המקיים:
$$\forall e \in p: \quad f(e) > 0$$

פירוק זרימה למסלולי זרימה

תהי N רשת זרימה.

המקרה השלם:

קיימת זרימה סטנדרטית $f: E \to \mathbb{N}$ המקיימת $|f| = k$ אמ"מ ניתן למצוא k מסלולי s-t ברשת N.

המקרה השבור:

קיימת זרימה סטנדרטית $f: E \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ המקיימת $|f| = x$ אמ"מ קיימת אריזה שבורה בגודל x של לכל היותר $|E|$ מסלולי s-t ברשת N.

הרשת השיורית

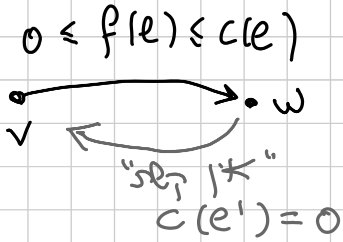
תהי f זרימה ברשת N. הרשת השיורית N_f היא רשת מעל אותם הצמתים ועם אותו מקור ובור.

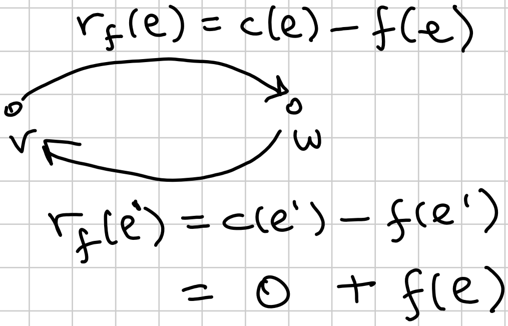
פונקצית הקיבולים ברשת השיורית:

$$r_f(v,w) \triangleq c(v,w) - f(v,w)$$

דוגמאות:

1





טענה: אם f זרימה ב N וכן g זרימה ב N_f,
אז: $f+g$ זרימה ב-N ומתקיים

$$|f+g| = |f| + |g|$$

מסקנה: אם קיימת זרימה g ב N_f עבורה $|g|>0$,
אז f אינה זרימה מקסימום.

טענה: זרימת האפס היא זרימה מקסימום ב-N
אמ"מ לא קיים מסלול p מהמקור s לבור t
שמקיים $\forall e\in p: c(e)>0$.

טענה: זרימת האפס היא זרימה מקסימום ב-N
אמ"מ לא קיים מסלול p מהמקור s לבור t
שמקיים $\forall e\in p: c(e)>0$.

הוכחה: $(\Leftarrow)$ קל.
$(\Rightarrow)$ נבנה חתך S ונראה $c(S)=0$.
מובן $\forall f: |f| \le c(S)$.
לכן זרימת אפס היא מקסימום.

כעת מוכנים להוכיח 2 תוצאות מרכזיות:

$\begin{cases}\text{min-cut max-flow Theorem} \\ \text{Ford \& Fulkerson algorithm}\end{cases}$

משפט: חתך מינ' = זרימה מקס'

אזי: בכל רשת N קיימת זרימה מקסימום ו-

$$\max\{|f| : \text{זרימה ב-}N\ f\} = \text{MIN}\{c(S) : \text{חתך } S\}$$

הוכחה: כבר הוכחנו $\forall f, S : \ |f| \le c(S)$.

לכן מעוניינים למצוא שוויון. תהי f זרימה מקסימום.

משמע: ב-N_f, זרימת האפס היא זרימה מקסימום.

יהי S חתך ב-N_f המקיים $r_f(S) = 0$.

ניתן להראות:

$$\forall (v,w) \in \delta(S) : \quad f(v,w) = c(v,w) \qquad \square$$

אלגוריתם למציאת זרימה מקסימום (Ford & Fulkerson)

> $f = 0$
>
> כל עוד קיים מסלול הרחבה p:
>
> תהי f_p זרימה מקסימלית ב-N_f לאורך p
>
> עדכן: $f \leftarrow f + f_p$
>
> החזר את f.

מסלול הרחבה: מסלול ב-N_f מהמקור לבור שלכל קשתותיו יש קיבול חיובי.

נכונות של Ford & Fulkerson

נניח קיבולים שלמים.

כיוון ש $C(\{s\}) < \infty$, קיימת זרימה מקסימום, שגודלה M.

בכל איטרציה מגדיל את הזרימה בלפחות 1.

לפיכך האלג' נעצר כעבור M איטרציות לכל היותר.

כשהאלגוריתם נעצר: אין מסלול הרחבה $\Longrightarrow$ הזרימה המחושבת היא מקסימום.

סיבוכיות של Ford & Fulkerson

נניח שכל הקיבולים שלמים.

בכל מסלול הרחבה, צוואר הבקבוק הוא לפחות 1.

לכן מספר האיטרציות $\leq |f|$

ולכן הסיבוכיות היא $O((m+n)\cdot|f|)$.

למה איננו מרוצים מזמן הריצה?