אלגוריתמים ברשתות -

- זרימה מקסימום ברשתות

סקירה של אלגוריתמים (Dinitz, Edmonds & Karp)

- שימושים של זרימה מקסימום

שידוך מקסימום בגרף דו-צדדי

כיסוי צמתים מינימום בגרף דו צדדי

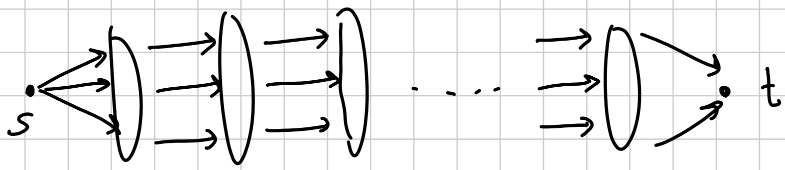
אלגוריתמים לזרימה מקסימום המבוססים על מסלולי שיפור

1) מסלולי שיפור קצרים: בכל איטרציה מצא מסלול הרחבה קצר ביותר.

1972: Edmonds & Karp הראו שהפעלת הכלל הזה מבטיחה $O(n \cdot m)$ איטרציות לכל היותר.
כל איטרציה ממומשת בזמן $O(m)$, ולכן זמן הריצה הכולל הוא $O(n \cdot m^2)$, כיון ש-$m=O(n^2)$ נקבל זמן ריצה $O(n^5)$.

אלגוריתמים לזרימה מקסימום המבוססים על מסלולי שיפור

1) מסלולי שיפור קצרים: בכל איטרציה מצא זרימה מקסימלית שאוכפת מסלולים קצרים ביותר בגרף השיורי.



* גרף שכבות בגרף השיורי.
* כל הקשתות בעלות קיבול $r_f(e) > 0$.
* כל המסלולים מהמקור לבור הם קצרים ביותר.

הרעיון הוצע וניתח ע״י דיניץ.

אלגוריתמים לזרימה מקסימום המבוססים על מסלולי שיפור

Dinitz 1970: הוכיח שמס׳ האיטרציות חסום ע״י n (כי מספר השכבות עולה מאיטרציה לאיטרציה).

בכל איטרציה:

בונה גרף שכבות (BFS בזמן $O(m)$).
מחשב זרימה מקסימלית (בזמן $O(m\cdot n)$).

ולכן זמן ריצה $O(m\cdot n^2)=O(n^4)$.

אנחנו נלמד אלג׳ שאינו מבוסס על מסלולי שיפור בעל סיבוכיות $O(n^3)$ ובעל תכונות מעניינות אחרות.

שימושים בזרימה מקסימום

שידוך מקסימום בגרף דו צדדי

מושגים:

גרף דו-צדדי: $G=(V,E)$ הוא גרף דו צדדי

אם ניתן לחלק את V ל-2 קבוצות זרות

$V=A\cup B$ כך שכל הקשתות מקיימות $E\subseteq A\times B$.

שידוך: $F\subseteq E$ היא שידוך אם כל צומת נשען

על קשת אחת לכל היותר של F.

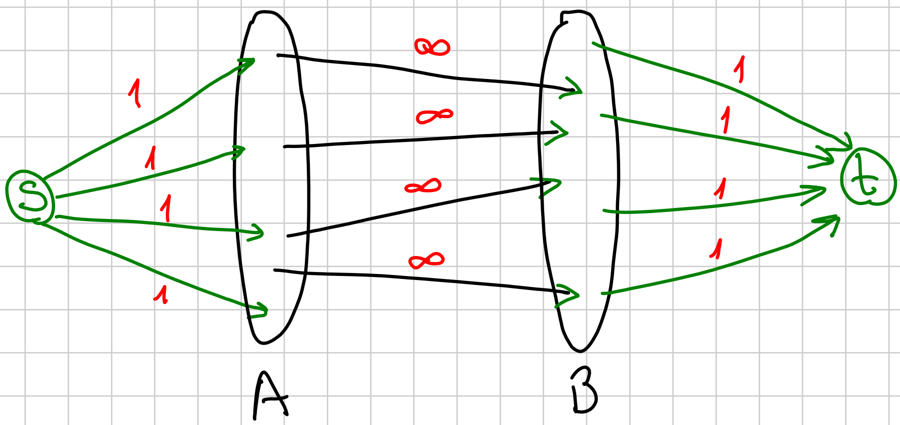
שידוך מקסימום: $F\subseteq E$ היא שידוך מקסימום אם לכל

שידוך $F'\subseteq E$ מתקיים $|F|\geq|F'|$.

טענה: ניתן לחשב שידוך מקסימום בגרף דו צדדי

ע"י פתרון של בע"ת זרימה מקסימום.

הוכחה:



התאמה חח"ע:

זרימות בשלמים $\longleftrightarrow$ שידוכים

מקיימת כמות זרימה = גודל השידוך. $\square$

עוד שימוש: כיסוי מינימום בצמתים בגרף דו צדדי

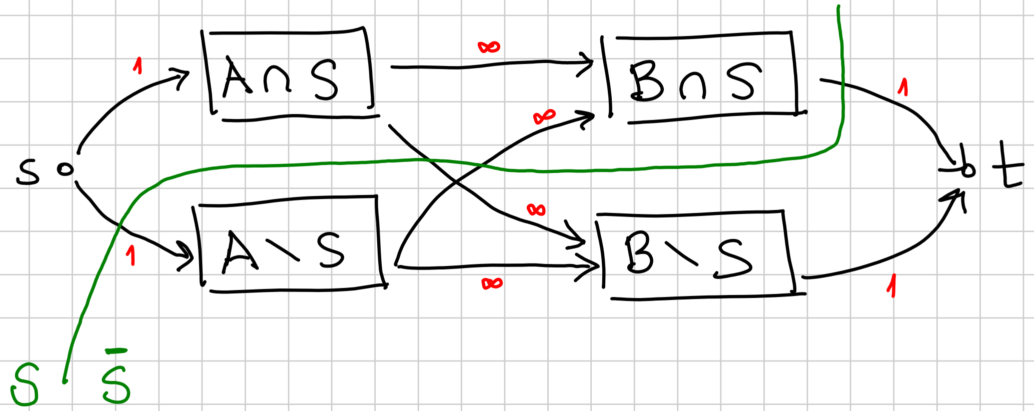
כיסוי בצמתים: $U \subseteq V$ הוא כיסוי בצמתים של קשתות הגרף $G=(V,E)$ אם לכל $(v,w) \in E$ מתקיים $U \cap \{v,w\} \neq \emptyset$.

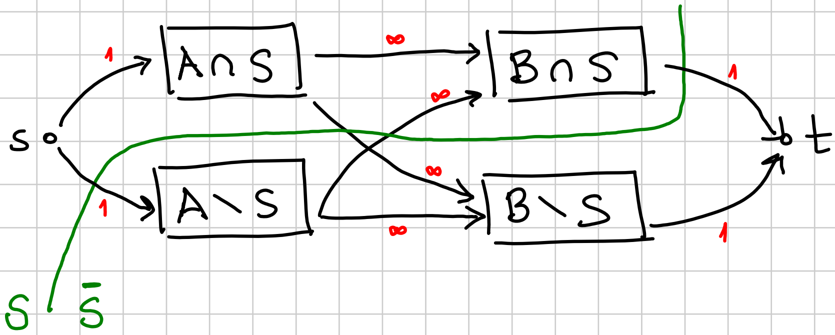
משפט König: בכל גרף דו צדדי גודל שידוך מקסימום שווה לגודל כיסוי קטן ביותר בצמתים.

הוכחה: נסמן M^* - שידוך מקסימום.
C^* - כיסוי מינימום בצמתים.
צ"ל $|M^*| = |C^*|$.

הכיוון הקל: $|C^*| \ge |M^*|$.

הכיוון הקשה: $|C^*| \le |M^*|$. התאמנו לגרף רשת זרימה שבה זרימת המקסימום f^* מקיימת $|f^*| = |M^*|$.
נפעיל את משפט חתך מינ' = זרימה מקס' לקבלת חתך S שמקיים $c(S) = |f^*|$:





התתך $\delta(S)$ מכיל 3 סוגי קשתות:

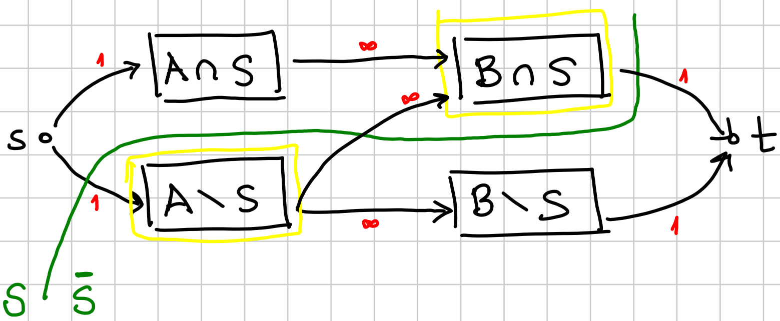
(1) קשתות $s \to a$ עבור $a \in A \setminus S$. קיבול 1

(2) קשתות $b \to t$ עבור $b \in B \cap S$ קיבול 1

(3) קשתות $a \to b$ עבור $b \in B \setminus S$, $a \in A \cap S$. קיבול ∞

$c(S) < \infty$, ולכן אין קשתות מסוג (3).

$\Leftarrow$ $|M^*| = |f^*| = c(S) = |A \setminus S| + |B \cap S|$



$\Leftarrow$ $|M^*| = |f^*| = c(S) = |A \setminus S| + |B \cap S|$

אבל $U = (A \setminus S) \cup (B \cap S)$ הוא כיסוי בצמתים!

ולכן $|M^*| = |U| \geq |C^*|$, כנדרש.

הערות: (1) ההוכחה גם מספקת אלג' למציאת C^*.

(2) מקרה נוסף של דואליות!