אלגוריתמים ברשתות 20/11/08

אלגוריתם push-relabel
למציאת זרימה מקסימום
של Goldberg & Tarjan

"A new approach to the maximum-flow problem", JACM, 33:4, Oct. 1988

מושגים:

עודף זרימה שנכנס לצומת v (excess flow).

$$e(v) \triangleq \sum_{u \in V} f(u,v)$$

(בזרימה חוקית, $e(v)=0$, לכל $v \in V \setminus \{s,t\}$.)

קדם זרימה (preflow): $f: V \times V \to \mathbb{R}$

מקיימת: אילוץ קיבול, אנטי-סימטריות, ועודף זרימה אי-שלילי:

$$\forall v \in V \setminus \{s\} : \quad e(v) \geq 0$$

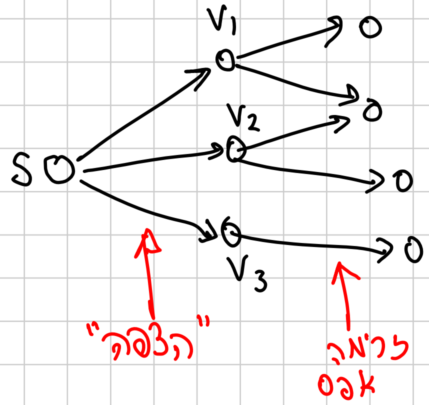
קשת שיורית זוג צמתים (v,w) המקיימים $r_f(v,w) > 0$.

קדם זרימה $\forall v \neq s: \quad e(v) \triangleq \sum_{u \in V} f(u,v) \geq 0$

דוגמא:

$$f(u,v) = \begin{cases} c(u,v) & \text{if } u=s \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

נשים לב: קדם-הזרימה מרוויה את כל קשתות $\delta(\{s\})$.



עקרונית

שמורה: האלגוריתם מחשב קדם זרימה אשר תמיד מרוויה חתך כלשהו בגרף.

האלג' מנסה "לתקן" את קדם-הזרימה כדי שתהפוך לזרימה תקינית (תקיים גם את אילוצי שימור הזרימה).

אם הזרימה תקינית, אז היא מקסימום (כי יש חתך רווי).

2 סוגי תיקונים:

(1) המשך הזרמה לכיוון הבור (אופטימי)

(2) החזר זרימה למקור (פסימי).

תוויות חוקיות

נתונה רשת N, קדם זרימה f, ורשת שיורית N_f.

פונקציה $d: V \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ נקראת פונקצית תוויות אם:

1. $d(s) = n$ (s הוא המקור)
2. $d(t) = 0$ (t הוא הבור)
3. $\forall v,w \in V: \; r_f(v,w) > 0 \Rightarrow d(v) \le d(w) + 1$

תנאי 3 מבטיח "מסלולים" קצרים מ-s ל-t.

דוגמא:

אם f היא קדם-זרימה שמציפה את $\delta(\{s\})$, נגדיר

$$d(v) = \begin{cases} n & \text{if } v = s \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}.$$

נשים לב שלכל w: $r_f(s,w) = 0$, ולכן d היא פונקצית תוויות חוקית.

תזכורת: $\left[\, d(v) \leq d(w)+1,\ d(t)=0,\ d(s)=n \,\right]$

סימון: $d_{N_f}(v,w) \triangleq$ המרחק בין v ל-w בגרף המושרה ע"י הקשתות השיוריות.

טענה 1: (1) $\forall v: \quad d(v) \leq d_{N_f}(v,t)$

(2) $\forall v \quad d_{N_f}(s,v) \geq n - d(v)$

$d_{N_f}(v,s) \geq d(v) - n$

(3) $\forall v \quad d(v) \geq n \Rightarrow d_{N_f}(v,t) = \infty$

טענה 2: אם f קדם זרימה ו-d פונקצית תוויות תקינית, אזי קיים חתך שרוני ביחס ל-f.