צומת אקטיבי

$$\left.\begin{array}{l} v \in V \setminus \{s,t\} \\ e(v) > 0 \\ d(v) < \infty \end{array}\right\}$$

איתחול

① קדם זרימה שמציפה את $\delta(\{s\})$.

② פונקציית תוויות פשוטה:

$d(s) = n \quad , \quad \forall v \neq s : d(v) = 0$

push (v, w)

applicability : v active, $r_f(v,w) > 0$, $d(v) = 1 + d(w)$

action : $\delta \triangleq \min \{ e(v), r_f(v,w) \}$

$f(v,w) \leftarrow f(v,w) + \delta \; ; \; f(w,v) = f(w,v) - \delta$

$e(v) \leftarrow e(v) - \delta \; ; \; e(w) \leftarrow e(w) + \delta$

$$\begin{tikzcd} v \arrow[r, bend left, "+\delta"] & w \arrow[l, bend left, "-\delta"] \end{tikzcd}$$

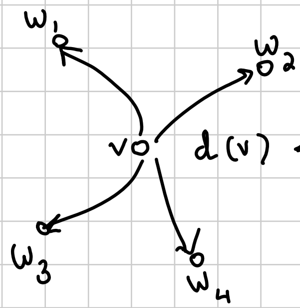
relabel (v)

applicability: v active and

$\forall w:\ r_f(v,w) > 0 \implies d(v) \le d(w)$

action: $d(v) \leftarrow 1 + \min\{d(w) \mid r_f(v,w) > 0\}$

הערה: $\min \emptyset = \infty$



$d(v) \leftarrow 1 + \min\{d(w_1), d(w_2), d(w_3), d(w_4)\}$

זוהי התווית הגבוהה ביותר ש-v יכול לקבל!

דחיפה מרווה: פעולת דחיפה push(v,w) היא מרווה, אם אחריה $r_f(v,w)=0$.

הערות:

① אם f קדם זרימה, d פונק' תווית חוקית ביחס ל-f, ו-v צומת פעיל אזי או שניתן לדחוף זרימה מ-v לצומת אחר (push(v,w)), או שניתן לעדכן את d(v) (כלומר relabel(v)).

האלגוריתם

① איתחול: f מזרימה $\delta(\{s\})$, d פונק' תוויות פשוטה.

② כל עוד קיימת פעולת דחיפה או עדכון תווית שניתן לבצעה:
בצע את הפעולה.

③ החזר את f.

שמורה
$$\begin{cases} f \text{ היא קדם זרימה} \\ d \text{ היא פונק' תוויות חוקית ביחס ל-} f \end{cases}$$

אם האלג' עוצר, ובעצירתו $\forall v: d(v) < \infty$,
אזי מובטח לנו:

① f היא זרימה חוקית.

② אין מסלול שיפור ב-N_f מ-s ל-t.

ולכן f היא זרימה מקסימום.

מכאן, שכדי להוכיח נכונות מספיק להראות:

① האלג' עוצר.

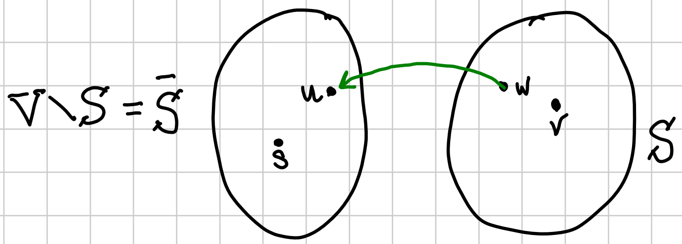
② בעצירתו, כל התוויות סופיות.

למה 3.5 אם f קדם זרימה וכן $e(v)>0$ אז: $dist_{N_f}(v,s) < \infty$.

ולכן relabel(v) $\infty = d(v)$ לא

הוכחה נסמן $S \triangleq \{ w \mid dist_{N_f}(v,w) < \infty \}$.

נניח בשלילה ש $s \notin S$.



$w \in S \ \&\ u \notin S$

$\Downarrow$

$r_f(w,u) = 0$

$\Downarrow$

$f(u,w) \le 0$ ⊛

$\forall w \neq s : e(w) \geq 0$

$$0 \le \sum_{w \in S} e(w) = \sum_{w \in S} \sum_{u \in V} f(u,w)$$

$$\text{(אנטי סימטריות)} = \sum_{w \in S} \sum_{u \notin S} f(u,w) \overset{⊛}{\le} 0$$

ולכן $\forall w \in S : e(w) = 0$, ובפרט עבור $v \in S$, וסתירה. □

הערות

1. התכונה של כל צומת אינה יורדת במהלך האלג'. בפרט, הפעולה relabel(v) מגדילה את $d(v)$.

2. במהלך ריצת האלג': $d(v) \le 2n-1$.

<u>הוכחה:</u> הראינו $dist_{N_f}(v,s) \geq d(v) - n$.
נסתכל על ההעלאה האחרונה של $d(v)$ ע"י פעולת relabel. בעת ההעלאה התקיים $e(v) > 0$ ולכן $dist_{N_f}(v,s) < \infty$, ולכן $dist_{N_f}(v,s) \le n-1$. □

מסקנה לכל v, מספר פעולות relabel $\le 2n-1$.
סה"כ מס' פעולות relabel $\le (n-2)(2n-1) < 2n^2$.

למה 3.9 מספר פעולות הדחיפה המרוות $\geq 2\cdot n\cdot m$

הוכחה: קבע זוג צמתים v,w. נוכיח שמס׳ הדחיפות המרוות מסוג $push(v,w)$ או $push(w,v)$ חסום ע״י $2n-1$.

נשים לב שבין כל 2 פעולות $push(v,w)$ מרוות, חייבת להיות פעולת $push(w,v)$.

נסמן ב- $t_1,t_2,\dots,t_k$ את סדרת הזמנים שבהם התקיימו דחיפות מרוות $push(v,w)$ או $push(w,v)$.

נסמן $d_{t_i}(v)$ - הערך של $d(v)$ בזמן t_i.

זמן

t_3 — $push(v,w)$

t_2 — $push(w,v)$

t_1 — $push(v,w)$ (מרווה)

וחייב להתקיים

$$d_{t_1}(v) = 1 + d_{t_1}(w)$$

$$d_{t_2}(w) = 1 + d_{t_2}(v) \geq 1 + d_{t_1}(v) = 2 + d_{t_1}(w)$$

נקבל $d_{t_{i+1}}(v) + d_{t_{i+1}}(w) \geq 2 + d_{t_i}(v) + d_{t_i}(w)$,

ולכן $d_{t_k}(v) + d_{t_k}(w) \geq (k-1)\times 2 + d_{t_1}(v) + d_{t_1}(w)$.

בדחיפה המרווה הראשונה: $d_{t_1}(v) + d_{t_1}(w) = 1$.

בדחיפה המרווה האחרונה: $d_{t_k}(v) + d_{t_k}(w) \leq (2n-1)\times 2 - 1$.

ולכן $2(k-1) + 1 \leq d_{t_k}(v) + d_{t_k}(w) \leq 4n-3$

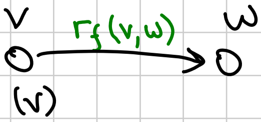
$$\Longrightarrow \quad k \leq 2n-1$$

$(v,w)\in E$ או $(w,v)\in E$ גורר שמס׳ דחיפות מרוות $\geq 2nm$. $\square$

נקודות להבהרה:

① איפה טענו בהוכחת למה 3.9 מגביל על החסם לדחיפות מרוות?

② איך נחסום דחיפות לא מרוות?



$$e(v) < r_f(v,w)$$

דחיפה לא מרווה היא טובה כי מזרימה
זרימה ב"מורד" והופכת צמתים "גבוהים" ללא פעילים.

זרימות מרוות "מקלקלות" תכונה זו, אבל אין ברירה.

למה 3.10 מס' פעולות הדחיפה הלא מרוות $\le 4n^2m$

הוכחה: נגדיר פונקצית פוטנציאל

$$\Phi \triangleq \sum \{d(v) \mid v \text{ פעיל}\}$$

איך משפיעות הפעולות על Φ?

דחיפה לא מרווה push(v,w):

$$\Phi_{\text{חדש}} \le \Phi_{\text{ישן}} - d(v) + d(w)$$

$$\le \Phi_{\text{ישן}} - 1$$

לכן, כל דחיפה לא מרווה מורידה את Φ!

דחיפה מרוויה push(v,w):

$$\phi_{\text{חדש}} \le \phi_{\text{ישן}} + d(w)$$

$$\le \phi_{\text{ישן}} + 2n-1$$

מס' דחיפות מרוויות $\le 2nm$.

$\Leftarrow$ סה"כ התרומה ל-ϕ בעבור דחיפות מרוויות חסום ע"י $2nm \times (2n-1)$.

כל פעולת relabel(v):

$$\phi_{\text{חדש}} \le \phi_{\text{ישן}} + d_{\text{חדש}}(v) - d_{\text{ישן}}(v)$$

$$\le \phi_{\text{ישן}} + 2n-1$$

ולכן סה"כ התרומה ל ϕ ע"י פעולות $\{relabel(v)\}_{v \in V}$ חסום ע"י $(2n-1)\cdot n$.

סיכום:

פעולות	סה"כ שינוי ב ϕ
דחיפה לא מרווה	≤ -1
דחיפות מרוות	$\leq +(2n-1)\times 2nm$
פעולות relabel	$\leq +(2n-1)\cdot n$

$$\left.\begin{array}{l} \phi_{\text{התחלה}} = 0 \\ \phi_{\text{סוף}} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

מס' דחיפות לא מרוות $\leq (2n-1)\cdot 2nm + (2n-1)\cdot n \leq 4n^2 m$

$\square$

$$0 = \phi_{\text{סוף}} = \phi_{\text{התחלה}} + \sum_{\text{פעולה}} \Delta\phi(\text{פעולה})$$

$$= \sum_{\text{relabels}} \Delta\phi(\text{relabel}) + \sum_{\text{sat. push}} \Delta\phi(\text{sat push})$$

$$+ \sum_{\text{non sat push}} \Delta\phi(\text{non sat push})$$

$$\leq (2n-1)n + 2nm \times (2n-1) - \#(\text{non sat push})$$

$$\Rightarrow \#(\text{non sat push}) \leq O(n^2 m)$$