24/11/08

אלגוריתמים בחשיבות -

- מימוש אלג' push-relabel

- חישוב זמן ריצה $O(n^3)$

מימוש אלגוריתם push-relabel

גרף תשתיתי: יהי $G=(V,E)$ גרף מכוון. גרף התשתית של G הוא גרף לא מכוון $\tilde{G}=(V,\tilde{E})$ שבו

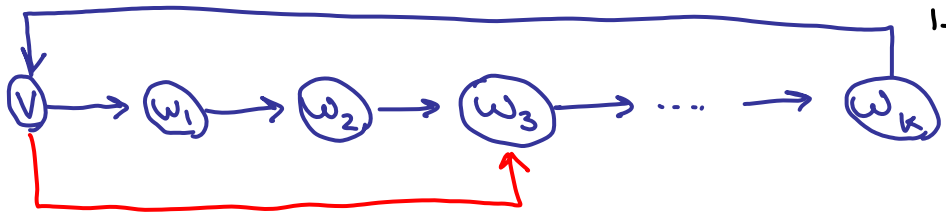
$\{v,w\}\in\tilde{E} \iff v\to w\in E$ או $w\to v\in E$

נקבל ונאמר $\{w,v\}$ קשת לא מכוונת ב G.

לכל קשת לא מכוונת $\{w,v\}$ בתהליך 3 ערכים:

$c(v,w)$, $c(w,v)$, $f(v,w)$ [שווה ל $-f(w,v)$].

לכל צומת v נתייחס רשימת הקשתות הללו מכוונות שמכילות אותו



קשת נוכחית (מומלצת לבחירה)

אם v פעיל, בודקים האם ניתן לדחוף כמה שאפשר לאורך הקשת הנוכחית. אחרת, מקדם את הקשת הנוכחית. אם מגיע לסוף הרשימה, מעדכן תגית של v, והקשת הנוכחית מצביעה לשכן הראשון w_1.

נבדוק בהתאמה קבוצת הצמתים הפעילים בהמשך.

Push/Relabel(v) [v צומת פעיל]

1) תהי $\{v,w\}$ הקשת הנוכחית ברשימה של v.

2) בצע push(v,w) אם ניתן.

אחרת

3) אם w אינו השכן האחרון ברשימה של v, קדם את המצביע של הקשת הנוכחית לשכן הבא.

4) אם w אחרון: עדכן את המצביע של הקשת הנוכחית לשכן הראשון, ובצע relabel(v).

טענה 4.1: בשורה (4) התנאים לביצוע relabel(v) מתקיימים.

הוכחה: רשימת שכני v נסרקה בטרם הגענו לשורה 4.

בכל קידום של המצביע לקשת הנוכחית מ-w_i ל-w_{i+1} מובטח

שמתקיים: $r_f(v,w_i)=0$ או $d(w_i) \geq d(v)$.

אם relabel(v) לא אפשרי, משמע קיים שכן w_i ש"מפריע".

כלומר: $r_f(v,w_i)>0$ וגם $d(v)>d(w_i)$.

אם $r_f(v,w_i)=0$ בזמן הקידום של המצביע עבור $r_f(v,w_i)>0$

בהגעה לשורה 4, משמע שבוצע בינהם push(w_i,v).

בזמן ה-push מתקיים $d(w_i)>d(v)$. ולכן בשורה (4) עדיין

$d(v)<d(w_i)$.

אם $d(v) \geq d(w_i)$ בזמן הקידום של המצביע, אזי $d(v)$ נשאר

כאותו הערך בשורה (4) בגלל ש $d(w_i)$ לא ירד (לא עלה).

מסקנה: w_i אינו יכול להפריע לביצוע relabel(v). ∎

תחזוקת קבוצת הצמתים הפעילים

Q = קב' הפעילים

בתחילה $Q=\{v\in V\setminus\{s,t\} : c(s,v)>0\}$

בכל פעולת push(v,w): insert(Q,w) (יתכן ש-w כבר פעיל).

ואם הדחיפה לא מרווה את delete(Q,v).

בכל פעולת push/relabel(v) השינוי ב-Q ממומש ב $O(1)$.

v פעיל יכול להיות לא פעיל רק ע"י push/relabel(v)

טענה 4.2: זמן הריצה של אלגוריתם push/relabel הוא

$$O(n\cdot m) + c\cdot \#\text{nonsaturating pushes}$$

$$= O(n^2 m)$$

הוכחה: נתבונן בקודקוד v, ונשאל: כמה פעמים נסרקת הרשימה של v? נשים לב שכל סריקה (למעט האחרונה) מסתיימת ב relabel(v), ולכן מס' הסריקות קטן מ $2n-1$.

אורך הרשימה הוא $\deg(v)$, ולכן סה"כ מס' הקידומים של המבוך לקשת הנוכחית (עבור כל הצמתים) חסום ע"י

$$O\left(n \sum_v \deg(v)\right) = O(n \cdot m).$$

כך בדיוק גם מקודם המבוך.

מס' הדחיפות המרוות $= O(nm)$ (בגלל בחירה למעלה).

מס' הדחיפות הלא מרוות $= O(n^2 m)$.

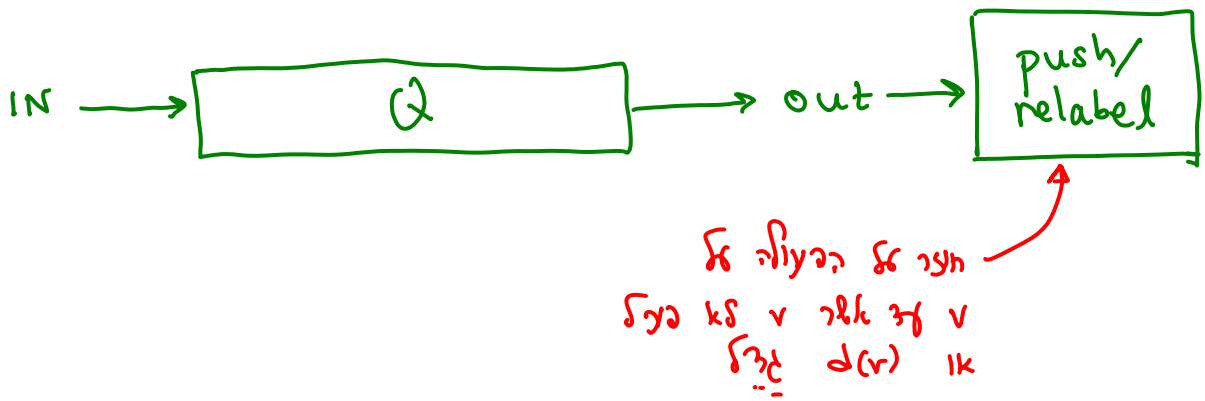
כל הפעלה של push/relabel לוקחת $O(1)$, מכאן משל. □

שיפור זמן הריצה של האלגוריתם

הרעיון המרכזי: קבעת מדיניות ניהול התור

ניתן להגיע סיבוכיות $O(n^3)$ במספר שיטות.

הטבעית והפשוטה היא FIFO (first-in first-out).



Discharge(Q)

1) $v \leftarrow$ dequeue(Q)
2) repeat
3) push/relabel(v)
4) if w becomes active, then insert(Q, w)
5) until $e(v)=0$ or $d(v)$ increases.
6) if v active, then insert(Q, v)

הערה: ניתן להחליף שורה (5) ב until $e(v)=0$

הגרסה מבצעת כל
עוד $Q \neq \emptyset$.
שמירה: כל אבר ב Q הם
בדיוק פעילים.

ניתוח האלג' כאשר Q מנוהל בשיטת FIFO

PASS 1: סדרת פעולות discharge
שמבוצעות כל עוד יש אתיק בגלל שהיה
בתור מאז האיתחול.

Q_1: קבר הפעלים בסוף PASS 1.

$v \in Q_1 \iff$ הוכנס לתור במהלך PASS-1.

בהינתן Q_i, נגדיר PASS $(i+1)$ בתור סדרת פעולות discharge
שמבוצעות הלל מסוף i PASS כל עוד התור מכיל בגלל
זמן Q_i.

טענה: מספר המעברים עפ"י היתר $\geq 4n^2$.

הוכחה: נגדיר $\Phi_i \triangleq \max\{d(v) : v \in Q_i\}$.

כיצד מושפעת Φ ממעבר בנצ' על היתר? $\Phi_{i+1} \gtreqless \Phi_i$?

אם לא בנצ'ו פעולת relabel, הרי שמצד הצד.מ בכל צומת פעיל ב Q_i הוקדר לצמתים "נמוכים" יתר, ולכן היתרות של כל צמתי Q_{i+1} קטנים מ Φ_i.

$\Leftarrow$ ירידה בערך של Φ. $(\Phi_{i+1} < \Phi_i)$.

ולכן אם $\Phi_{i+1} \geq \Phi_i$, משמע בנצ' relabel במהלך PASS(i+1).

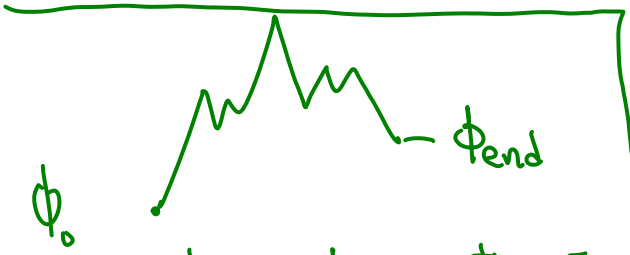
מס' פעולות relabel חסום ע"י $2n^2$, ולכן מס' מעברים שבהם $\Phi_{i+1} \geq \Phi_i$ גם חסום ע"י $2n^2$.

כעת נחסום גם את $|\{i \mid \Phi_{i+1} < \Phi_i\}|$.

$$\Delta^+ \triangleq \sum_{\{i : \Phi_{i+1} > \Phi_i\}} (\Phi_{i+1} - \Phi_i) \leq \sum_{\substack{\text{פעולות} \\ \text{relabel}}} \underbrace{\left(d_{new}(v) - d_{old}(v)\right)}_{\text{הגדלה בתוית של } v \text{ בתוצאה מפעולת relabel}(v)}$$

$$\leq \sum_v \left(d_{max}(v) - d_0(v)\right) \leq n \cdot 2n$$

$$|\{i : Q_{i+1} < \Phi_i\}| \leq \underbrace{\sum_{\{i : \Phi_{i+1} < \Phi_i\}} (\Phi_i - \Phi_{i+1})}_{\Delta^-}$$ מאידך,



$$\Phi_{end} - \Phi_0 = \Delta^+ - \Delta^-$$

$$= \Delta^+ + \Phi_0 - \Phi_{end} \leq 2n^2$$

מהו זמן הריצה הכי רע ב- $4n^2$ מעברים לפי התר?

בכל הוצאה מהתור מבוצע push/relabel(v). נתלק למקרים:

(1) כל הפעולות למעט בתיפות לפי מרווח.

(כולל קידום מבנים לקשת נוכחית, relabel, בתיפות מרווח) תסום ע"י סעיף 2.4 ע"י $O(nm)$, ובה תסום ע"י $O(n^3)$.

(2) בתיפות לפי מרווח: אם מבוטלת יוצאת בתיפה לפי מרווה, אז הוא מפסיק להיות פעיל, ולכן בכל מעבר יש לכל היותר בתיפה לפי מרווה אחת מכל בומת. מכאן שסך הבתיפות הלפי מרווח הוא $O(n^3)$.

מסקנה: זמן הריצה של האלג' כאשר Q מנוהל בשיטת FIFO הוא $O(n^3)$.

שיטות נוספות:

- וריאציות שבהן חוצרים את push/relabel(v) מס' כלשהו של relabels או עד ש- $e(v)=0$.
- בתור בומת ב-Q בעל יתרון גבוהה ביותר.
- wave method.

ניתן להבחין את זמן הריצה ל $O(n \cdot m \lg \frac{n^2}{m})$ ע"י שימוש במבני נתונים מתוחכמים.