אלגוריתמים ברשתות - 30/11/08

מציאת חתך מינימום (גלובלי) בגרף לא מכוון.

① Nagamochi & Ibaraki - 92 (סיבוך זמנים)

Stoer & Wagner - 94 (פישוט)

② Karger - 93 (כיוון אקראי)

חתך מינימום בגרף לא מכוון

הגדרה: גרף לא מכוון הוא K-קשיר בקשתות אם:

(1) הגרף נשאר קשיר גם אם מסירים K קשתות כלשהן

(2) קיימות K+1 קשתות שהסרתן הופכת את הגרף ללא קשיר.

משפט [Menger]: $G=(V,E)$ הוא K-קשיר בקשתות אמ"מ ברשת N (הלא מכוונת) המתקבלת מ-G ע"י הגדרת $c(e)=1$ לכל קשת מתקיים:

$$K = \min \{ c(S) \mid \emptyset \subsetneq S \subsetneq V \}$$

חתך S המשיג מין' $c(S)$ נקרא חתך מינימום גלובלי.

כיצד נחשבו?

שיטות לחישוב חתך מינימום (גלובלי)

(1) לפי הגדרה: לכל $V \supsetneq S \supsetneq \emptyset$, חשב את $C(S)$.

(2) לכל $s,t \in V$ (שונים), חשב חתך מינימום בין s ל- t. זמן ריצה: $\binom{n}{2}=O(n^2)$ חישובי חתך-(s,t) מינימום. [$O(n^5)$].

(3) בחר $r \in V$ כלשהו. לכל $v \in V \setminus \{r\}$ חשב חתך מינימום בין r ל- v. זמן ריצה: $(n-1)$ חישובי חתך-(s,t) מינימום. [$O(n^4)$]

למה מספיק לחשב $\min_{v \neq r} st(G,r,v)$?

<u>הסבר:</u> $st(G,x,y) \geq \min\{st(G,r,x),\ st(G,r,y)\}$ ⊛

ולכן $\mathrm{MIN}_{x,y}\ st(G,x,y) \geq \mathrm{Min}_{x}\ st(G,r,x)$

והכיוון השני ($\leq$) ברור....

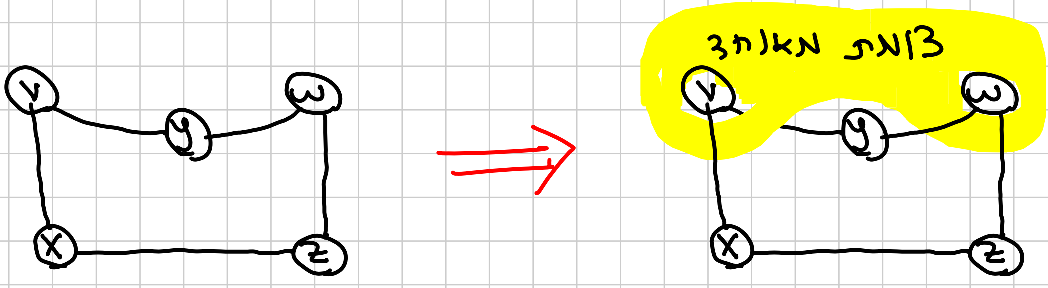
ולמה ⊛ נכון?

כי כל חתך שמפריד בין x ל y מפריד גם בין x ל r או בין y ל- r....

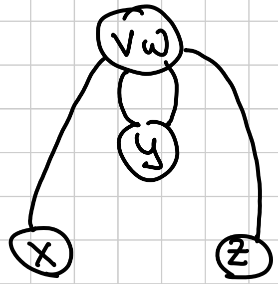
בעתיד ננסה לשפר את זמן הריצה $O(n^4)$.

כיווץ זוג צמתים

פעולת הכיווץ מקבלת גרף לא מכוון $G=(V,E)$ וזוג צמתים $v,w \in V$ (לאו דווקא שכנים).



שקול לגרף:



הערה: פעולת הכיווץ מייצרת גרף עם קשתות מקבילות. ברשת המתאימה הקיבול מציין את מס' הקשתות המקבילות

סימונים

$\lambda(G)$ - קיבול חתך מינימום גלובלי ב G.

G_{vw} - הגרף המתקבל מכיווץ הזוג $\{v,w\}$ ב-G.

$\lambda(G,v,w)$ - קיבול חתך מינימום ב-G שאינו מפריד בין v ל w.

$$\lambda(G,v,w) \triangleq \min\{ c(S) \mid \{v,w\} \subseteq S \subsetneq V \}$$

טענה: $\lambda(G,v,w) = \lambda(G_{vw})$

הוכחה: התאמה חח"ע ומשמרת קיבול בין חתכי G שאינם מפרידים בין v ל w לבין חתכי G_{vw}.

טענה: $\lambda(G) = \min\{\lambda(G_{vw}), st(G,v,w)\}$

אלגוריתם "משופר" לחישוב $\lambda(G)$:

min-cut(G)

  pick $v \neq w \in G$

  קריאה רקורסיבית

  מחושב ע"י הרצת אלג' לזרימה מקס'

  Return $\left(\mathrm{MIN}\{\text{min-cut}(G_{vw}), st(G,v,w)\}\right)$

מס' הצמתים בעומק i הוא $n-i$ ולכן זמן הריצה

$$O\left(\sum_{i=0}^{n-1}(n-i)^3\right) = O(n^4)$$

ושיפרנו רק את הקבועים...

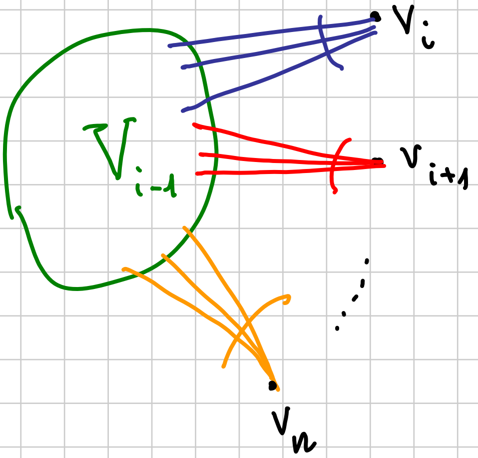
נניח $V=\{v_1,\dots,v_n\}$. נסמן $V_i=\{v_1,\dots,v_i\}$.

בהינתן פרמוטציה $\pi: V\to V$, נסמן $\pi(V_i)=\{\pi(v_1),\dots,\pi(v_i)\}$.

הגדרה: פרמוטציה $\pi: V\to V$ של הצמתים נקראת חוקית אם מתקיים לכל $2\le i<j\le n$:

$$c\left((\pi(v_i)\times V_{i-1})\cap E\right) \geq c\left((\pi(v_j)\times V_{i-1})\cap E\right)$$

כנ׳ לפעמים, נתעלם מ-π ונניח ש-$\{v_1,\dots,v_n\}$ הוא כבר סידור חוקי.



v_i מחובר הכי "חזק" ל V_{i-1}.

ניתן למצוא סידור חוקי

בזמן $O(n^2)$:

בהינתן V_{i-1} נחשב את v_i

בזמן $O(n)$.

• גם מימוש "מהיר" יותר (בזמן ששווה לזמן הריצה של האלג' של דייקסטרה למציאת מסלולים קצרים ביותר).

<u>טענה</u>: אם $\{v_1, \dots, v_n\}$ הוא סידור חוקי, אז

$$st(G, v_n, v_{n-1}) = c(\delta(\{v_n\})).$$

הוכחה בהמשך...

אלג' למציאת חתך מינימום גלובלי

(קריאה ראשונה min-cut(G,c))

```
min-cut (G, c)
    if |V(G)| = 1 ,  return(∞)
    {v_1,...,v_n} ← Legal order of V(G)
    Return ( MIN { δ({v_n}),
                   min-cut(G_{v_{n-1} v_n}, c) } )
```

סיבוכיות:

$$T(n) \le \underbrace{O(n^2)}_{\text{חישוב הסידור}} + T(n-1)$$

$$\Longleftarrow \quad T(n) = O(n^3)$$

(כמו ריצה בודדת של זרימה מקס')

נכונות האלגוריתם

נכונות נובעת מן הטענה המרכזית $\lambda(G,v_n,v_{n-1}) = c(\delta\{v_n\})$

כיון ש $\lambda(G) = \min\{st(G,v_{n-1},v_n),\ \lambda(G_{v_{n-1}v_n})\}$.

במהלך הוכחת הטענה המרכזית, נעזר בטענות הבאות:

טענה: לכל $p,q,r \in V$ מתקיים

$$st(G,p,q) \geq \mathrm{MIN}\{st(G,p,r),\ st(G,q,r)\}$$

טענה: אם G' מתקבל מ-G ע"י השמטת צומת אז:

$$st(G',v,w) \leq st(G,v,w)$$

הוכחה $st(G,v_{n-1},v_n) = c(\delta(\{v_n\}))$

הוכחה באינדוקציה על $m+n$ $(|V|+|E|)$.

הבסיס עבור $m+n=2$ ברור.

נחלק ל-2 מקרים: (I) $(v_{n-1},v_n) \in E$ (II) $(v_{n-1},v_n) \notin E$.

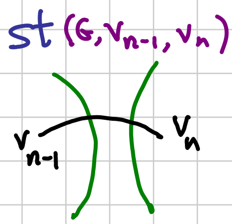
במקרה (I): יהי G' הגרף המתקבל ע"י השמטת הקשת (v_{n-1},v_n).

$$c(\delta(\{v_n\})) = c(\delta'(\{v_n\})) + c(v_{n-1},v_n)$$

$$\underset{\text{(הנחת האינד')}}{=} st(G',v_{n-1},v_n) + c(v_{n-1},v_n)$$

+ סידור חוקי גם עבור G'

$$= st(G,v_{n-1},v_n)$$



במקרה (II):

$$c(\delta(\{v_n\})) \geq st(G, v_n, v_{n-1})$$

$$\geq \mathrm{MIN}\{st(G, v_n, v_{n-2}), st(G, v_{n-1}, v_{n-2})\}$$

ולכן מספיק להוכיח ש $c(\delta(\{v_n\}))$ אינו גדול מ-2 הביטויים ב MIN.

יהי G' הגרף המתקבל ע"י השמטת הצומת v_{n-1}.

נשים לב כי $\{v_1, v_2, \ldots, v_{n-2}, v_n\}$ הוא סידור חוקי של G'.

לפיכך:

$$c(\delta(\{v_n\})) = c(\delta'(\{v_n\}))$$

$$= st(G', v_n, v_{n-2}) \quad \text{(הנחת האינד')}$$

$$\leq st(G, v_n, v_{n-2})$$

כעת נוכיח $c(\delta(\{v_n\})) \leq st(G, v_{n-1}, v_{n-2})$.

יהי G'' הגרף המתקבל מ-G ע"י השמטת הצומת v_n.

נשים לב כי $\{v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}\}$ הוא סידור חוקי של G''.

לפיכך:

$$c(\delta(\{v_n\})) \leq c(\delta(\{v_{n-1}\})) \quad \text{(תכונת הסידור)}$$

$$= st(G'', v_{n-1}, v_{n-2}) \quad \text{(הנחת האינד')}$$

$$\leq st(G, v_{n-1}, v_{n-2}) \quad \boxtimes$$

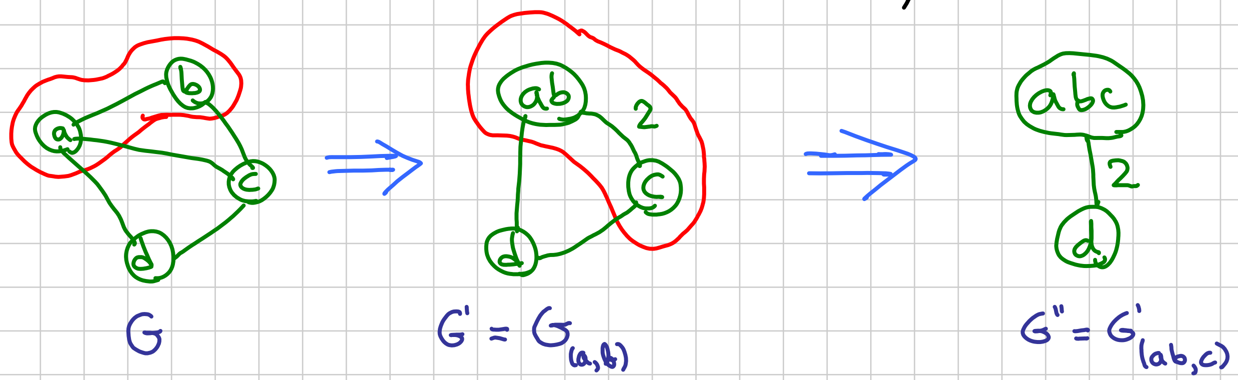
אלגוריתם כיווצים אקראיים למציאת חתך מינימום

Rand - min-cut (G)

If $|V(G)| = 2$ Return (E(G))

pick an edge $e \in E(G)$ with prob. $\frac{c(e)}{c(E)}$.

Return (Rand-min-cut (G_e))



הערות:

① אם e כווצה, אז לא תשתתף בחתך המחושב.

② אינטואיציה: להמנע מקשתות עם קיבול גבוה (כדי להקטין את קיבול החתך). ולכן קשת כבדה מקבלת עדיפות ע"פ קשת קלה.

③ לכל חתך $\delta(A)$ $(\emptyset \subsetneq A \subsetneq V)$ יש הסתב' חיובית שהוא יחושב ע"י האלגוריתם.

④ נרצה להוכיח: לכל חתך מינימום $\delta(A)$:

$$Pr\left(\delta(A) \text{ מוחזר אלג'} \right) \geq \frac{1}{\binom{n}{2}} = \frac{2}{n(n-1)}$$

הגברת סיכוי ההצלחה Amplification

נניח ש $Pr(\text{אלג' מוצא חתך מינ'}) \ge p = \frac{1}{n^c}$

אם נחזור על האלג' k פעמים, ונבחר את החתך הכי קטן מבין k הריצות, מה ההסת' למציאת חתך מינימום?

$$Pr\left(\bigcup_{i=1}^{k} \text{אלג' מוצא חתך מינ' בריצה ה-}i\right) = 1 - Pr\left(\bigcap_{i=1}^{k} \text{אלג' נכשל במציאת חתך מינ' בריצה } i\right)$$

$$= 1 - \prod_{i=1}^{k} Pr\left(\text{אלג' נכשל בריצה } i\right)$$

$$\ge 1-(1-p)^k \ge 1-e^{-pk}$$

עבור $k=\frac{1}{p}$ נקבל $1-\frac{1}{e}$, עבור $k=\frac{\ln n}{p}$ נקבל $1-\frac{1}{n}$, עבור $k=\frac{n}{p}$ נקבל $1-e^{-n}$.

משפט: אם $\delta(A)$ הוא חתך מינימום, אז:

$$Pr\left(\text{אלג' מחזיר } \delta(A)\right) \ge \frac{1}{\binom{n}{2}}$$

הוכחה: נסמן ב- $\{e_1,\dots,e_{n-2}\}$ את סדרת הקשתות שהאלג' בוחר לכווץ.

נסמן ב- $X_i \triangleq$ המאורע ש $e_i \notin \delta(A)$.

$$Pr\left(\text{אלג' מחזיר } \delta(A)\right) = Pr\left(\bigcap_{i=1}^{n-2} X_i\right)$$

$$= Pr(X_1)\cdot Pr(X_2 \mid X_1)\cdot \ldots \cdot Pr(X_{n-2} \mid X_1 \cdots X_{n-3})$$

נראה ש $\Pr(X_1) \geq 1-\frac{2}{n}$. ⊛

נסמן $k=c(\delta(A))$. לכל v מתקיים $c(\delta(\{v\}))\geq k$

ולכן $c(E)\geq \frac{1}{2}kn$. ולכן

$$\Pr(\overline{X}_1) = \frac{c(\delta(A))}{c(E)} \leq \frac{k}{\frac{1}{2}kn} = \frac{2}{n}.$$

נראה ש $\Pr(X_{i+1} \mid X_1 \wedge X_2 \wedge \cdots \wedge X_i) \geq 1-\frac{2}{n-i}$ ⊛⊛

אחרי כיווץ $e_1,\dots,e_i$ תתך המינימום נשאר בקיבול k.

מאידך, מספר הצמתים ירד ל-$(n-i)$ ולכן

$$\Pr(\overline{X}_{i+1} \mid X_1 \wedge \cdots \wedge X_i) \leq \frac{2}{n-i}.$$

מסקנה:

Pr(אלג׳ מחזיר $\delta(A)$) $= \Pr(X_1)\cdot\Pr(X_2\mid X_1)\cdots\Pr(X_{n-2}\mid X_1\cdots X_{n-2})$

$$\geq \left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n-1}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{2}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{\cancel{n-2}}{n}\right)\cdot\left(\frac{\cancel{n-3}}{n-1}\right)\cdot\left(\frac{\cancel{n-4}}{\cancel{n-2}}\right)\cdots\left(\frac{2}{\cancel{4}}\right)\left(\frac{1}{\cancel{3}}\right)$$

$$= \frac{2}{n(n-1)}$$

$\boxtimes$

מסקנה: מס׳ החתכים השונים בעלי קיבול מינימום חסום ע״י $\binom{n}{2}$.

(מה מספרם בגרף מעגל? האם יש גרף לא מעגל עם $\binom{n}{2}$ חתכי מינימום?)

זמן הריצה:

ריצה בודדת $O(n^2)$.

צריך לפחות n^2 ריצות ⇐ לא יותר יעיל מריצה אחת של זרימה מקס'.

נשים לב $Pr(X_1) \geq 1-\frac{2}{n}$, ועבור $i<\frac{n}{2}$

$$Pr(X_{i+1} \mid X_1 \cdots X_i) \geq 1-\frac{4}{n}$$

מאידך בסוף הסת' ההצלחה נופלת ל-$\frac{1}{3}$.

Karger & Stein הורידו את זמן הריצה ל $O(n^2 \lg n)$ על בסיס האבחנה הבאה:

① בצע $\frac{n}{2}$ כיווצים כמו קודם.

② בצע 2 ריצות בת"ל על הגרף הנותר, ובחר בטוב מן השניים.

(נעיר כי $\frac{n}{2}$ אינה בחירה אופטימלית לפיצול).