8/12/2008

אלגוריתמים ברשתות

זרימה במחיר מינימום:

- הגדרה
- משפט Klein
- מחירים מופחתים
- אלגוריתם של Klein (ביטול מעגלים שליליים)
- אלגוריתם Scaling

זרימה במחיר מינימום

$G=(V,E)$ גרף מכוון עם קב' קשתות סימטרית $\left((x,y)\in E \Rightarrow (y,x)\in E\right)$

$u: E\to \mathbb{R}$ פונקצית קיבולים (מותר $u(e)<0$).

בשביל חסמים תחתונים

$c: E\to \mathbb{R}$ פונקצית מחירים אנטי-סימטרית $\left(c(x,y)=-c(y,x)\right)$

$f: E\to \mathbb{R}$ זרימה מעגלית מקיימת:

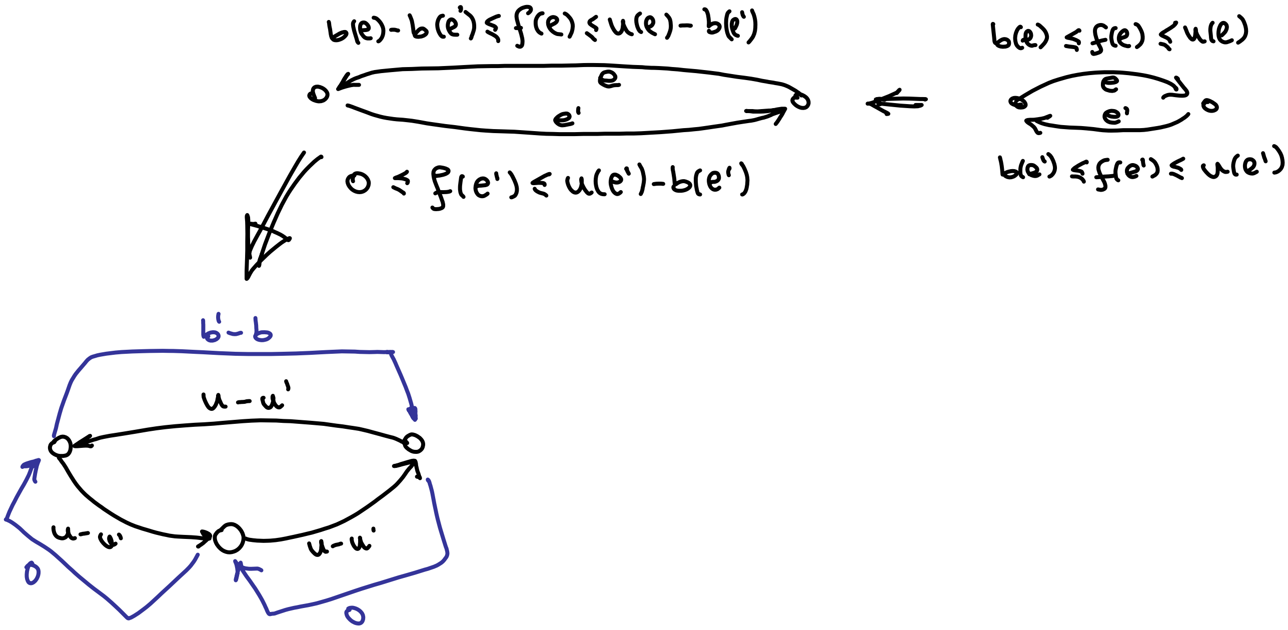
1. אילוץ קיבול $\forall e: \; f(e)\le u(e)$
2. אנטי סימטרית $f(x,y)=-f(y,x)$
3. חוק שימור $\forall x: \; \sum_y f(x,y)=0$

מחיר זרימה $\triangleq$ $cost(f)=\frac{1}{2}\sum_e c(e)\cdot f(e)$

הערות:

① למה קיבולים שליליים? (דרך לאלץ חסמים תחתונים)

ראינו כבר רדוקציות מהגדרות של זרימה עם חסמים תחתונים לזרימה עם קיבולים שליליים:



② למה מחירים אנטי-סימטריים?

הזרמת יחידת זרימה ב-e עולה $c(e)$.

הזרימה אנטי-סימטרית, ולכן זרימה של יחידה ב-(x,y) גוררת מינוס יחידת זרימה בכיוון (y,x):

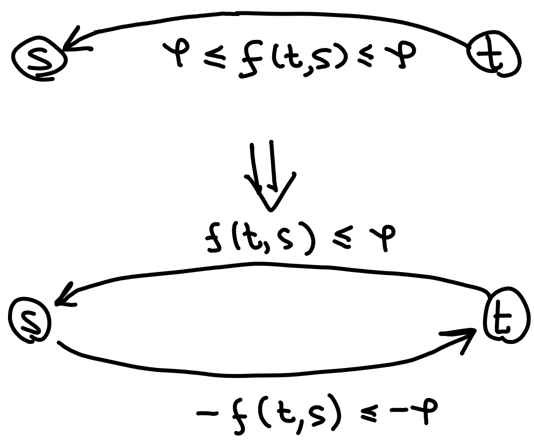
$$\underbrace{c(x,y)\cdot f(x,y)}_{\text{מחיר הזרימה ב }(x,y)} + \underbrace{c(y,x)\cdot f(y,x)}_{\text{מחיר הזרימה ב }(y,x)} = 2\cdot f(x,y)\cdot c(x,y)$$

③ למה מחלקים את $\sum c(e)f(e)$ ב-2?

4) למה זרימה מעגלית ?

מכליל זרימת (s,t) רגילה שבה דורשים $\varphi = |f|$.

רדוקציה :



מכליל עוד בעיות : transshipment

הגרף השיורי : הקיבולים השליליים לא משנים דבר!

<u>קיבול שיורי</u> : $r_f(e) \triangleq u(e) - f(e)$

(ואין קושי בהגדרה כי E סימטרית)

<u>קשת שיורית</u> : אם $r_f(e) > 0$.

"לינאריות" ממשיכה להתקיים :

f זרימה ב N וגם g זרימה ב N_f

אז $f+g$ זרימה ב N .

וכן $cost(f+g) = cost(f) + cost(g)$

פירוק למעגל זרימה ממשיך להתקיים .

משפט (Klein 67): f זרימה במחיר מינימום אמ"ם אין מעגל במחיר שלילי ב N_f.

הוכחה: $(\Leftarrow)$ זרימה g במעגל במחיר שלילי ב N_f גוררת:

$$cost(f+g) = cost(f) + cost(g) < cost(f)$$

$(\Rightarrow)$ יהי f^* זרימה במחיר מינימום המקיימת $cost(f^*) < cost(f)$.

נטען: (f^*-f) היא זרימה חוקית בגרף השיורי N_f.

אילוצי קיבול:

$$(f^*-f)(e) = f^*(e) - f(e) \leq u(e) - f(e) = r_f(e)$$

ובגלל לינאריות (f^*-f) אנטי-סימטרית ומקיימת שימור זרימה.

אבל $cost(f^*-f)<0 \Leftarrow$ יש ב N_f מעגל שלילי (כי נפרק את (f^*-f) למעגלי זרימה. $\boxtimes$

מחירים "מופחתים" (reduced costs)

פונקציית מחירים $p: V \longrightarrow \mathbb{R}$

אינטואיציה: $p(v) =$ מחיר הסחורה ב-v.

מחיר מופחת: $c_p(v,w) \triangleq p(v) + c(v,w) - p(w)$

אינטואיציה: $c_p(v,w) =$ הרווח מקניית סחורה ב-v, הובלה ל-w ומכירתה ב-w.

למה:

$$\forall (x,y)\in E : \quad c_p(x,y) = -c_p(y,x)$$

$$\forall\ x \overset{\pi}{\rightsquigarrow} y : \quad c_p(\pi) = p(x) + c(\pi) - p(y)$$

$$\forall \text{ cycle } \gamma : \quad c_p(\gamma) = c(\gamma)$$

$$\sum_e c_p(e)\cdot f(e) = \sum_e c(e)\cdot f(e)$$

מסקנה: בע"ית מציאת זרימה במחיר מינימום על מחירים $c(e)$ שקולה למציאת זרימה במחיר מינימום על מחירים מופחתים $c_p(e)$.

משפט (Ford & Fulkerson 62): זרימה מעגלית f היא במחיר מינימום אמ"ם קיימת פונקצית מחירים p עבורה:

$$\forall e\in E:\quad r_f(e)>0 \Rightarrow c_p(e)\geq 0$$

הוכחה: הכיוון הקל ($\Longrightarrow$): אם קיימת p עבורה $c_p(e)>0$ לכל קשת שיורית, הרי שברור שאין מעגל שלילי ב-N_f ביחס ל-c_p. לכן f במחיר מינימום ביחס ל-c_p, ולכן גם ביחס ל-c.

($\Longleftarrow$) מחפש p עבורה $0\leq c_p(x,y)=p(x)+c(x,y)-p(y)$ לכל קשת (x,y). כלומר: $p(y)\leq p(x)+c(x,y)$.

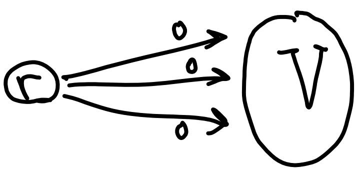
למה הדבר דומה? לפונקצית מרחק $p(a)=dist_c(r,a)$

כאשר: r - הוא צומת שממנו נמדדים המרחקים, c - אורכי הקשתות.

צריך להקפיד ש-$dist_c(r,a)$ יהיה מוגדר היטב.

(א) שלא יהיה $+\infty$: כלומר מ-r יש מסלול לכולם...

נוסיף צומת חדש r ונחבר לכולם על קשת באורך 0.



(ב) שלא יהיה $-\infty$: כלומר שלא נקלע מספר לא חסום
של פעמים דרך מעגל שלילי. אבל המחירים נמדדים
ב E_f, ושם אין מעגל שלילי כי f במחיר מינימום.

ולכן
$$p(v) \triangleq \min\left\{ c(\pi) \;\middle|\; r \xrightarrow[\pi \text{ מסלול ב } E_f]{\pi} v \right\}$$

מקיים את הנדרש. ☒

אלגוריתם ביטול המעגלים עם מחירים שליליים [Klein 67]

(1) חשב זרימה מעגלית חוקית f.

(2) כל עוד N_f מכיל מעגל γ עם מחיר שלילי: שפר זרימה לאורך γ.

$$\begin{cases} \varepsilon = \min\{ r_f(e) : e \in \gamma \} \\ g \triangleq \text{זרימה בכמות } \varepsilon \text{ לאורך } \gamma \\ f \leftarrow f + g \end{cases}$$

סיבוכיות: אם הקיבולים והמחירים שלמים אז מס' האיטרציות
באלג' של קליין חסום ע"י $O(m \cdot U \cdot C)$, כאשר
$$U \triangleq \max\{|u(e)|\}_e \quad , \quad C \triangleq \max\{|c(e)|\}_e$$

<u>הוכחה:</u> כיון שהקיבולים שלמים נקבל שבכל איטרציה $\varepsilon \ge 1$.

כיון שהמחירים שלמים, למעגל שלילי מחיר ≤ -1.

ולכן בכל איטרציה הירידה במחיר ≥ 1.

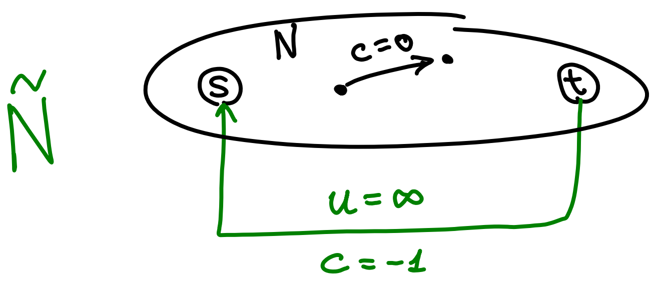
מאידך

$$\frac{1}{2}\sum_e c(e)\cdot f(e) \ge -\frac{1}{2} m\cdot C\cdot U \quad \boxtimes$$

זמן ריצה פסאודו-פולינומי ....

מציאת זרימה מעגלית במחיר מינימום מכלילה את הבעיה של מציאת זרימה מקס' (ללא מחירים).

הרדוקציה היא:



נשלח זרימה מקס' מ s ל-t ממזערת את המחיר בגלל הקשת החדשה מ-t ל-s.

מה עושה האלג' של קליין ברשת הנ"ל?

מעגל שלילי ב $\tilde{N}_f$ $\longleftrightarrow$ מסלול שיפור ברשת השיורית N_f

$\Leftarrow$ קליין מכליל את Ford & Fulkerson !

אלגוריתם capacity scaling לזרימה במחיר מינימום

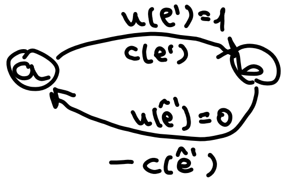
- נניח: קיבולים שלמים לא שליליים, $\forall e: u(e) \in \mathbb{N}$

- נתחיל בשאלה הבאה:

נתונה זרימה f במחיר מינימום ברשת N.

כעת נוסיף קשת $a \xrightarrow{e'} b$ במחיר $c(e')$ ובקיבול 1.

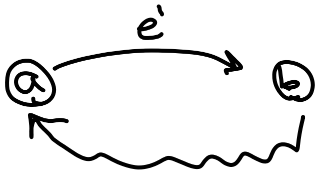
כלומר:



האם ידיעת f ב N עוזרת למציאת זרימה במחיר מינימום ב $N' = N + e'$?

נעיר: אפילו אם $c(e')>0$ יתכן ש-f אינה במחיר מינימום ב N'...

נשאל האם הוספת e' (והקשת ההפוכה) מייצרת מעגל שלילי ברשת N'_f ?



מעגל שלילי יתכן רק מהצורה

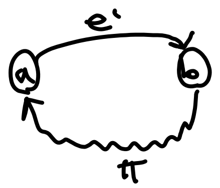
π מסלול במחיר מינימום ב N_f

כאשר: $c(e') + c(\pi) < 0$

לכן נחשב מסלול זול ביותר π מ b ל a.

אם $c(e') + c(\pi) > 0$, אז אין מעגל שלילי, ו-f נשארת במחיר מינימום גם ב N'. (ונגדיר $f'=f$).

אם $c(e') + c(\pi) < 0$, אז נעביר יחידת זרימה במעגל $e'+\pi$ לקבלת f'.



טענה: f' זרימה במחיר מינימום ב-N'.

הוכחה: נסמן $S = \{ v \mid$ קיים מסלול מ-b ל-v ב-N_f $\}$

כמובן $a \in S$ (כי $c(\pi) < \infty$), וכל צמתי π ב-S.

ולכן אם N_f' מכילה מעגל שלילי γ, אז צמתי המעגל מוכלים ב-S.

נשתמש בפונקצית מחירים $d : S \to \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י

$$d(v) = \min\{ c(\pi') \mid \pi' \text{ מסלול מ-b ל-v ב-} N_f \}$$

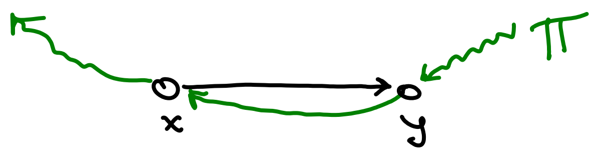
אם $e \in N_f$ כמובן $c_d(e) \geq 0$.

עבור e' נקבל $r_{f'}(e') = 0$ ואין בעיה.

עבור $rev(e')$

$$c_d(b,a) = d(b) + c(b,a) - d(a)$$
$$= 0 - c(a,b) - c(\pi) > 0$$

נותר לבדוק בקשת $(x,y) \in N_f'$ שאינה ב-N_f.



יתכן רק אם $(y,x) \in \pi$.

$$c_d(y,x) = d(y) + c(y,x) - d(x)$$

$$= 0 \quad (\text{כי } \pi \text{ מסלול קצר ביותר})$$

ולכן $c_d(x,y) = 0$.

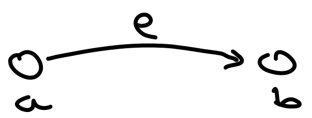
$\boxtimes$

אלג׳ הדירוג capacity scaling

דומה לאלג׳ של Gabow. יהי $k=\lceil \lg_2(\max\{u(e)\}+1)\rceil$

נפצל כל קשת ל k קשתות מקבילות.

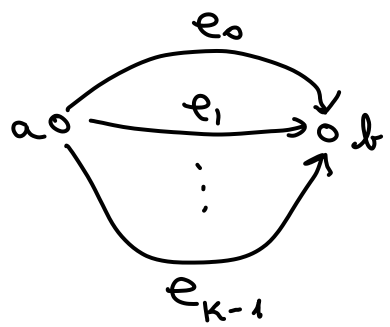
הקיבול של הקשת ה-i הוא 2^i או 0, בהתאם לסיבית ה-i בייצוג של $u(e)$.



$$u(e)=\langle \alpha_{k-1}\cdots\alpha_0\rangle$$

אז

$$u(e_i)=\alpha_i\cdot 2^i$$



נמיין את הקשתות (המפוצלות) לפי קיבול.

$$E_i=\{e \mid u(e_i)=2^i\}$$

תאור האלג׳:

1. מתחיל ברשת (V,E') כאשר $E'=\emptyset$ עם זרימה 0.
2. עבור $i=k-1$ ועד 0 בצע:
3. כל עוד קיימת קשת $e\in E_i$ שטרם צורפה ל E':
   - הוסף את e ל E' עם קיבול $u(e')=1$ ומחיר $c(e')$.
   - חשב זרימה במחיר מינימום f' ב (V,E').
4. הכפל קיבולים וזרימות ב E' פי 2.
5. החזר את f.