אלג' ברשתות

7/4/11

הוכחת משפט Dilworth

ע"י זרימה ברשתות

משפט Dilworth (גרסה גרפית)

יהי $G=(V,E)$ גרף מכוון חסר מעגלים.

$U\subseteq V$ נקראת בלתי-תלויה אם לכל $u,v\in U$ לא קיים מסלול מכוון מ-u ל-v (או להיפך).

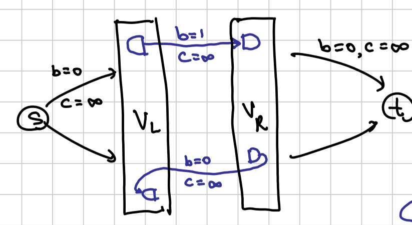
קב' מסלולים מכוונים $\{P_i\}_{i=1}^k$ נקראת כיסוי במסלולים אם לכל $v\in V$ קיים P_i כך ש- $v\in P_i$.

משפט: $\min\{k : \exists \{P_i\}_{i=1}^k \text{ path cover}\}$
$= \max\{|U| : U \text{ is indp}\}$

הוכחה: הכיוון הקל הוא min≥max: כל כיסוי במסלולים חייב לכלול לפחות $|U|$ מסלולים, אם U ב"ת.

כדי להוכיח את הכיוון השני, נבנה בניית עזר.

הרשת N תתקבל מ-G באופן הבא



$N=\langle \hat V,\hat E, b, c, s, t\rangle$

$\hat V=\{s,t\}\cup V_L\cup V_R$

עותקים של V

$\hat E = \{s\}\times V_L \cup V_R\times\{t\} \cup \{(v_\ell,v_r)\}_{v\in V} \cup \{(u_r,v_\ell)\}_{(u,v)\in E}$

טענה 1: יש התאמה חח"ע בין קבוצת הכיסויים במסלולים של G לבין קב' הזרימות החוקיות בשלמים ב G.

ההתאמה Π מקיימת $\Pi(\{P_i\}_{i=1}^k)$ היא זרימה בגודל k.

הוכחה: לכל כיסוי $\{P_i\}_{i=1}^k$ נתאים זרימה f ע"י הזרמת יחידה לאורך המסלול המתאים ל P_i ב-N. המסלול המתאים ל $P_i \triangleq v_1\to v_2\to\dots\to v_d$ הוא $s\to v_{1\ell}\to v_{1r}\to v_{2\ell}\to\dots\to v_{dr}\to t$.

הכיוון ההפוך מתקבל כתוצאה מפירוק כל זרימה חוקית למסלולי זרימה. (כאן מתבסס על היעדר מעגלים)

שלד ההוכחה

$\min\{k : \exists \{P_i\}_{i=1}^{k} \text{ path cover}\} \overset{3}{\le} \max\{|U| : U \text{ is indp}\}$

לפי למה (1) $\|$ $\quad\quad$ $\overset{?}{\geq}$

$\min\{|f| : f \text{ זרימה חוקית ב } N\} \overset{\text{min flow = max cut משפט}}{=} \max\{c(S) : S \text{ חתך ב } N\}$

$$c(S) \triangleq b(\delta(S)) - c(\delta(\bar{S}))$$

לפיכך, מספיק להוכיח

$\max\{|U| : U \text{ is indp.}\} \geq \max\{c(S) \mid S \text{ חתך ב } N\}$

למה 2:

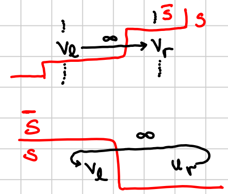
$\max\{|U| : U \text{ is indp.}\} \geq \max\{c(S) \mid S \text{ חתך ב } N\}$

הוכחה: נראה כי לכל חתך S המקיים $c(S) > -\infty$, קיימת קב' בת"ל $X(S)$ המקיימת $|X(S)| = c(S)$.

אבחנות: אם $c(S) > -\infty$ אז

1) $\forall v \in V: \quad v_\ell \notin S \Rightarrow v_r \notin S$

2) $\forall (u,v) \in E: \quad u_r \notin S \Rightarrow v_\ell \notin S$



בהינתן S עם $c(S) > -\infty$ נגדיר $X(S) = \{v : v_\ell \in S, v_r \notin S\}$

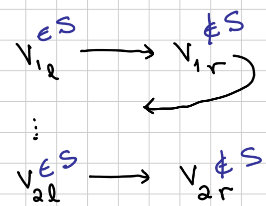
נראה כי $X(S)$ בת"ל:

בדרך השלילה: אם $v_1, v_2 \in S$ וכן $v_1 \overset{P}{\rightsquigarrow} v_2$,

אז נעקוב אחרי P ב N:

במסלול המתאים חייבת להיות קשת מ-$\bar{S}$ ל-S (כי $v_{1r} \notin S$ וכן $v_{2\ell} \in S$).

ולכן $c(S) = -\infty$ וסתירה.



נראה כי $|X(S)| = c(S)$.

כאמור $c(S) = b(\delta(S)) - c(\delta(\bar{S}))$

אבל $c(\delta(\bar{S})) = 0$ ולכן $c(S) = b(\delta(S))$

$= |\{v : v_\ell \in S, v_r \notin S\}| = |X(S)|$

מש"ל.