אלגוריתמים ברשתות - 10/4/11

מציאת חתך מינימום (גלובלי) בגרף לא מכוון.

① Nagamochi & Ibaraki - 92 (סידור צמתים)

Stoer & Wagner - 94 (פישוט)

② Karger - 93 (כיווץ אקראי)

קשירות בקשתות

יהי $G=(V,E)$ גרף לא מכוון.

חתך (a,b): תת קבוצה $F \subseteq E$ שמנתקת את a מ-b נקראת חתך (a,b) בקשתות. מנתקת $\triangleq$ אין ב $(V,E \setminus F)$ מסלול מ a ל-b.

$$st(G,a,b) \triangleq \min\{|F| : F \subseteq E \text{ חתך } (a,b)\}$$

$p(a,b)$: מקס' מס' המסלולים הזרים בקשתות בין a ל-b.

משפט [Menger]: $\forall a,b \in V : st(G,a,b) = p(a,b)$

קשירות בקשתות של G: $C_G = \min\limits_{a \neq b} p(a,b)$

חתך מינימום בגרף לא מכוון

הגדרה: גרף לא מכוון הוא k-קשיר בקשתות אם:

(1) הגרף נשאר קשיר גם אם מסירים $k-1$ קשתות כלשהן

(2) קיימות k קשתות שהסרתן הופכת את הגרף ללא קשיר.

חתך מינימום גלובלי: $F \subseteq E$ המקיים:

1) $(V,E \setminus F)$ אינו קשיר

2) $|F| = C_G$.

בעיה: איך נחשב את C_G? איך נמצא חתך מינ' גלובלי?

שיטות לחישוב חתך מינימום (גלובלי)

(1) לפי הגדרה; לכל $\emptyset \subsetneq S \subsetneq V$, חשב את $C(S)$.

(2) לכל $s,t \in V$ (שונים), חשב חתך מינימום בין s ל-t. זמן ריצה: $\binom{n}{2} = O(n^2)$ חישובי חתך-(s,t) מינימום. $[O(n^5)]$.

(3) בחר $r \in V$ כלשהו. לכל $v \in V \setminus \{r\}$ חשב חתך מינימום בין r ל-v. זמן ריצה: $(n-1)$ חישובי חתך-(s,t) מינ'. $[O(n^4)]$

למה מספיק לחשב $\min\limits_{\{v : v \neq r\}} st(G,r,v)$?

הסבר: ⊛ $st(G,x,y) \geq \min\{st(G,r,x),\ st(G,r,y)\}$

ולכן $\underset{x,y}{\mathrm{MIN}}\ st(G,x,y) \geq \underset{x}{\mathrm{Min}}\ st(G,r,x)$

והכיוון השני ($\leq$) ברור...

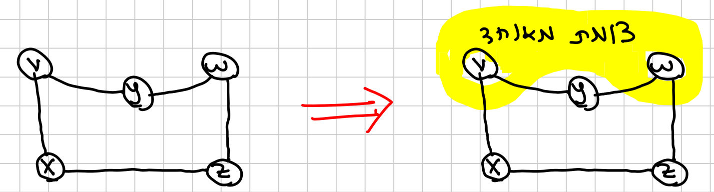
ולמה ⊛ נכון?

כי כל חתך שמפריד בין x ל y מפריד גם בין x ל r או בין y ל r...

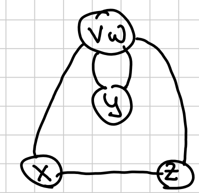
כעת ננסה לשפר את זמן הריצה $O(n^4)$.

כיווץ זוג צמתים

פעולת הכיווץ מקבלת גרף לא מכוון $G=(V,E)$ וזוג צמתים $v,w \in V$ (לאו דווקא שכנים).



שקול לגרף:



הערה: פעולת הכיווץ מייצרת גרף עם קשתות מקבילות. ברשת המתאימה הקיבול מציין את סכום קיבולי הקשתות המתאימות

סימונים

$\lambda(G)$ - קיבול חתך מינימום גלובלי ב G.

G_{vw} - הגרף המתקבל מכיווץ הזוג $\{v,w\}$ ב-G.

$\lambda(G,v,w)$ - קיבול חתך מינימום ב-G שאינו מפריד בין v ל w.

$$\lambda(G,v,w) \triangleq \min\{c(S) \mid \{v,w\} \subseteq S \subsetneq V\}$$

טענה: $\lambda(G,v,w) = \lambda(G_{vw})$

הוכחה: התאמה חח"ע ומשמרת קיבול בין חתכי G שאינם מפרידים בין v ל w לבין חתכי G_{vw}.

טענה: $\lambda(G) = \min\{\lambda(G_{vw}),\ st(G,v,w)\}$

אלגוריתם "משופר" לחישוב $\lambda(G)$:

```
min-cut (G)
    pick v ≠ w ∈ G
    Return ( MIN { min-cut (G_vw), st(G,v,w) } )
```

קריאה רקורסיבית

מחושב ע"י הרצת אלג' לזרימה מקס'

מס' הצמתים בצעד i הוא n-i ולכן זמן הריצה

$$O\left(\sum_{i=0}^{n-1}(n-i)^3\right) = O(n^4)$$

ושיפרנו כך את הקבועים...

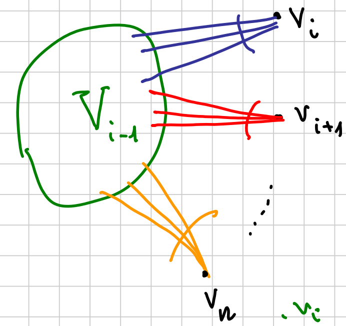
נניח $V=\{v_1,\dots,v_n\}$. נסמן $V_i=\{v_1,\dots,v_i\}$.

בהינתן פרמוטציה $\pi:V\longrightarrow V$, נסמן $\pi(V_i)=\{\pi(v_1),\dots,\pi(v_i)\}$.

הגדרה: פרמוטציה $\pi:V\to V$ של הצמתים נקראת <u>חוקית</u> אם מתקיים לכל $2\le i<j\le n$:

$$c\left(\pi(v_i)\times\pi(V_{i-1})\right) \geqslant c\left(\pi(v_j)\times\pi(V_{i-1})\right)$$

כדי לפשט, נתעלם מ-π ונניח ש-$\{v_1,\dots,v_n\}$ הוא כבר סידור חוקי.



v_i מחובר הכי "חזק" ל V_{i-1}.

ניתן למצוא סידור חוקי

בזמן $\min\{O(n^2),\ O((n+m)\lg n)\}$

נתחזק לכל צומת v את $c(v,V_{i-1})$

נשלוף מקס', ונעדכן את המספר לכל שכן של v_i.

במערך: שליפה $O(n)$, עדכון $O(deg)$. בערימה: שניהם $O(\lg n)$.

יש גם מימוש "מהיר" יותר (בזמן ששווה לזמן הריצה של האלג' של דייקסטרה למציאת מסלולים קצרים ביותר).

<u>טענה</u>: אם $\{v_1,\dots,v_n\}$ הוא סידור חוקי, אז

$$st(G,v_n,v_{n-1}) = c\left(\delta(\{v_n\})\right).$$

הוכחה בהמשך...

אלג' למציאת חתך מינימום גלובלי

(קריאה ראשונה $\text{min-cut}(G,c)$)

$\text{min-cut}\ (G,c)$

$\quad$ if $|V(G)|=1$, return(∞)

$\quad \{v_1,\dots,v_n\} \leftarrow$ Legal order of $V(G)$

$\quad$ Return$\left(\ \text{MIN}\left\{\delta(\{v_n\}),\ \text{min-cut}(G_{v_{n-1}v_n},c)\right\}\right)$

סיבוכיות:

$$T(n) \leqslant \underbrace{O(n^2)}_{\text{חישוב הסידור}} + T(n-1)$$

$\Longleftarrow$ $T(n)=O(n^3)$ (כמו ריצה בודדת של זרימה מקס')

נכונות האלגוריתם

נכונות נובעת מן הטענה המרכזית $\lambda(G,v_n,v_{n-1}) = c(\delta\{v_n\})$

כיון ש $\lambda(G)=\min\{st(G,v_{n-1},v_n),\ \lambda(G_{v_{n-1}v_n})\}$.

במהלך הוכחת הטענה המרכזית, נעזר בטענות הבאות:

טענה: לכל $p,q,r\in V$ מתקיים

$$st(G,p,q) \geqslant \text{MIN}\{st(G,p,r),\ st(G,q,r)\}$$

טענה: אם G' מתקבל מ-G ע"י השמטת צמתים אז:

$$st(G',v,w) \leqslant st(G,v,w)$$

הוכחה $st(G,v_{n-1},v_n) = c(\delta(\{v_n\}))$

הוכחה באינדוקציה על $m+n$ $(|V|+|E|)$.

הבסיס עבור $m+n=2$ ברור.

נחלק ל-2 מקרים: (I) $(v_{n-1},v_n)\in E$ (II) $(v_{n-1},v_n)\notin E$.

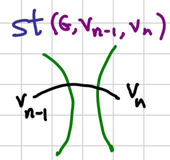
במקרה (I): יהי G' הגרף המתקבל ע"י השמטת הקשת (v_{n-1},v_n).

$$c(\delta(\{v_n\})) = c(\delta'(\{v_n\})) + c(v_{n-1},v_n)$$

(הנחת האינד') $= st(G',v_{n-1},v_n) + c(v_{n-1},v_n)$

+ סידור חוקי גם עבור G'

$= st(G,v_{n-1},v_n)$



במקרה (II): $c(\delta(\{v_n\})) \ge st(G,v_n,v_{n-1})$

$$\ge MIN\{st(G,v_n,v_{n-2}), st(G,v_{n-1},v_{n-2})\}$$

ולכן מספיק להוכיח ש $c(\delta(\{v_n\}))$ אינו גדול מ-2 הביטויים ב MIN.

יהי G' הגרף המתקבל ע"י השמטת הצומת v_{n-1}.

נשים לב כי $\{v_1,v_2,\dots,v_{n-2},v_n\}$ הוא סידור חוקי של G'.

לפיכך:

$$c(\delta(\{v_n\})) = c(\delta'(\{v_n\}))$$

(הנחת האינד') $= st(G',v_n,v_{n-2})$

$\le st(G,v_n,v_{n-2})$

כעת נוכיח $c(\delta(\{v_n\})) \le st(G,v_{n-1},v_{n-2})$.

יהי G'' הגרף המתקבל מ-G ע"י השמטת הצומת v_n.

נשים לב כי $\{v_1,v_2,\dots,v_{n-1}\}$ הוא סידור חוקי של G''.

לפיכך:

$c(\delta(\{v_n\})) \le c(\delta(\{v_{n-1}\}))$ (תכונת הסידור)

$= c(\delta''(\{v_{n-1}\}))$ (אין קשת (v_{n-1},v_n))

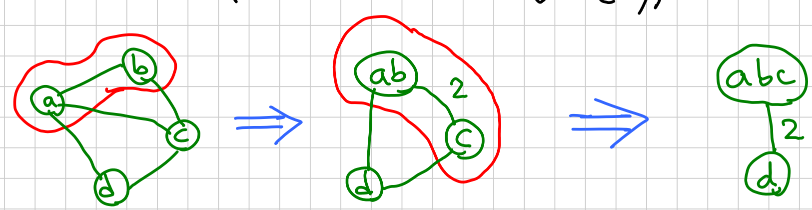
$= st(G'',v_{n-1},v_{n-2})$ (הנחת האינד')

$\le st(G,v_{n-1},v_{n-2})$ $\boxtimes$

אלגוריתם כיווצים אקראיים למציאת חתך מינימום

הנחה: G קשיר

```
Rand-min-cut (G)
  If |V(G)| = 2  Return (E(G))
  pick an edge e∈E(G) with prob. c(e)/c(E).
  Return ( Rand-min-cut ( G_e ))
```



הערות:

1. אם e טובה, אז לא תשתתף בחתך המחושב.
2. אינטואיציה: להמנע מקשתות עם קיבול גבוה (כדי להקטין את קיבול החתך). לכן קשת כבדה מקבלת עדיפות על קשת קלה.
3. לכל חתך $\delta(A)$ $(\emptyset \subsetneq A \subsetneq V)$ יש הסתב' חיובית שהוא יחושב ע"י האלגוריתם.
4. נרצה להוכיח: לכל חתך מינימום $\delta(A)$:

$$Pr(\text{אלג' מחזיר } \delta(A)) \geq \frac{1}{\binom{n}{2}} = \frac{2}{n(n-1)}$$

משפט: אם $\delta(A)$ הוא חתך מינימום, אז

$$Pr(\text{אלג' מחזיר } \delta(A)) \geq \frac{1}{\binom{n}{2}}$$

הוכחה: נסמן ב- $\{e_1, \dots, e_{n-2}\}$ את סדרת הקשתות שהאלג' בוחר לכווץ.

נסמן ב- $X_i \triangleq$ המאורע ש $e_i \notin \delta(A)$.

$$Pr(\text{אלג' מחזיר } \delta(A)) = Pr\left(\bigcap_{i=1}^{n-2} X_i\right)$$

$$= Pr(X_1) \cdot Pr(X_2 | X_1) \cdots Pr(X_{n-2} | X_1 \cdots X_{n-3})$$

נראה ש $Pr(X_1) \geq 1 - \frac{2}{n}$. (*)

נסמן $k = c(\delta(A))$. לכל v מתקיים $c(\delta(\{v\})) \geq k$

ולכן $c(E) \geq \frac{1}{2}kn$. ולכן

$$Pr(\overline{X_1}) = \frac{c(\delta(A))}{c(E)} \leq \frac{k}{\frac{1}{2}kn} = \frac{2}{n},$$

נראה ש $Pr(X_{i+1} | X_1 \wedge X_2 \wedge \cdots \wedge X_i) \geq 1 - \frac{2}{n-i}$ (**)

אחרי כיווץ $e_1, \dots, e_i$ חתך המינימום נשאר בקיבול k.

אבל, מספר הצמתים ירד ל-$(n-i)$ ולכן

$$Pr(\overline{X_{i+1}} | X_1 \wedge \cdots \wedge X_i) \leq \frac{2}{n-i}.$$

הגברת סיכוי הצלחה Amplification

נניח ש $Pr(\text{אלג' מחזיר חתך מינ'}) \geq p = \frac{1}{n^c}$

אם נחזור על האלג' k פעמים, ונבחר את החתך הכי קטן מבין k הריצות, מה ההסתב' למציאת חתך מינימום?

$$Pr\left(\bigcup_{i=1}^{k} \text{אלג' מוצא חתך מינ' בריצה ה-} i\right) = 1 - Pr\left(\bigcap_{i=1}^{k} \text{אלג' נכשל במציאת חתך מינ' בריצה } i\right)$$

$$= 1 - \prod_{i=1}^{k} Pr(\text{אלג' נכשל בריצה } i)$$

$$\geq 1 - (1-p)^k \geq 1 - e^{-pk}$$

עבור $k = \frac{1}{p}$ נקבל $1 - \frac{1}{e}$, עבור $k = \frac{\ln n}{p}$ נקבל $1 - \frac{1}{n}$, עבור $k = \frac{n}{p}$ נקבל $1 - e^{-n}$.

מסקנה:

Pr(אלג' מחזיר $\delta(A)$) $= Pr(X_1)\cdot Pr(X_2|X_1)\cdots Pr(X_{n-2}|X_1\cdots X_{n-2})$

$$\geq \left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n-1}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{2}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{\cancel{n-2}}{n}\right)\cdot\left(\frac{\cancel{n-3}}{n-1}\right)\cdot\left(\frac{\cancel{n-4}}{\cancel{n-2}}\right)\cancel{\cdots\cdots}\left(\frac{2}{\cancel{4}}\right)\left(\frac{1}{\cancel{3}}\right)$$

$$= \frac{2}{n(n-1)}$$

☒

מסקנה: מס' החתכים השונים בעלי קיבול מינימום חסום ע"י $\binom{n}{2}$.

(מה מספרם בגרף מעגל? האם יש גרף לא מעגל עם $\binom{n}{2}$ חתכי מינימום?)

זמן הריצה:

ריצה בודדת $O(n^2)$.

צריך לפחות n^2 ריצות $\Leftarrow$ לא יותר יעיל מריצה אחת של זרימה מקס'.

נשים לב $Pr(X_1)\geq 1-\frac{2}{n}$, ועבור $i<\frac{n}{2}$

$$Pr(X_{i+1}|X_1\cdots X_i)\geq 1-\frac{4}{n}$$

מאידך בסוף הסיכוי להצלחה נופלת ל-$\frac{1}{3}$.

Karger & Stein הורידו את זמן הריצה ל-$O(n^2\lg n)$ על בסיס האבחנה הבאה:

1. בצע $\frac{n}{2}$ כיווצים כמו קודם.
2. בצע 2 ריצות ב"ת על הגרף הנותר, ובחר בטוב מן השניים.

(נעיר כי $\frac{n}{2}$ אינה בחירה אופטימלית לפיצול.)