28/4/11

צביעת גרפים

- צביעת צמתים
  * חסם תחתון
  * אלג' חמדן (שלא מבטיח דבר)
- צביעת קשתות
  * משפט Vizing

נתון גרף $G=(V,E)$.

$f: V \to [K]$ נקראת **צביעת צמתים** אם

$$\forall (u,v) \in E : \quad f(u) \neq f(v)$$

המספר הכרומטי של G (בצמתים)

$$\chi(G) \triangleq \min \{ K \mid \text{קיימת צביעת צמתים } f: V \to [K] \}$$

- שימושים רבים (גם בתקשורת)
- חישוב $\chi(G)$ זוהי בעיה NP-hard.
- קירוב $\chi(G)$ גם כן בעיה קשה (אפילו ביחס $|V|^{1-\epsilon}$)
- קירוב קשה גם אם $\chi(G)=3$! (יחס $5/3-\epsilon$ קשה וידוע $\sim |V|^{3/14}$)
- כל מחלקת צבע היא קב' בת"ל של צמתים
- לכל גרף מישורי $\chi(G) \leq 4$ (משפט 4 הצבעים)

נסמן: $\omega(G)$ = גודל תת הגרף המלא הגדול ביותר.

טענה: ① $\chi(G) \geq \omega(G)$ ② max independent set $(G) \geq \frac{n}{\chi(G)}$

נעיר: גם $\omega(G)$ קשה לקירוב....

אלג' חמדן

סרוק את הצמתים:

צבע צומת v בצבע הראשון ששכניו לא צבועים בו.

$$color(v) = \min \{ i \mid \forall \text{neighbor } u: color(u) \neq i \}$$

בכמה צבעים משתמש האלג' החמדן?

נסמן $\Delta(G) \triangleq \max_{v\in G} \deg(v)$

טענה: $\chi(G) \le \Delta(G)+1$

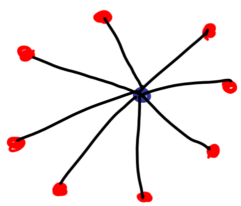
הוכחה: האלג' החמדן לא נזקק לעולם ליותר מ $\Delta(G)+1$ צבעים.

האם זה חסם מדויק?

hint: $G_{n,m}$ - matching

שאלה

מצא דוגמא שבה $Greedy = \Delta+1$ אבל $\chi(G) \ll \Delta$



שאלה:

דוגמא נגדית לחמדן אם דרגות לא אלות

יהי $G=(V,E)$ גרף.

$f: E \to [k]$ נקראת צביעת קשתות אם

$$\forall\ e_1 \neq e_2 : \quad e_1 \cap e_2 \neq \emptyset \Rightarrow f(e_1) \neq f(e_2)$$

מספר הצביעה בקשתות של G:

$$\chi'(G) \triangleq \min\{k \mid \text{קיימת צביעה בקשתות } f: E \to [k]\}$$

הערות:

(1) $\chi'(G) \ge \Delta(G)$

(2) $\chi'(G) \le 2\cdot\Delta(G) - 1$

(3) קל לקבוע את $\chi'(G)$ בגרפים כפל 2.

שימוש לצביעת קשתות

G הוא גרף תקשורת (קשת (u,v) $\Leftarrow$ u ו- v רוצים לשוחח).

אבל: ① כל צומת יכול לשוחח רק עם שכן אחד בו- זמנית.

② משך כל שיחה $= 1$ יחידת זמן.

רוצה לקבוע מועד שיחה לכל קשת כך שמקסימום זמן ההמתנה קטן ככל האפשר.

הערה: כל מחלקת צבע בצביעת קשתות היא שידוך. (ולכן רוצים לכסות את הקשתות במינימום שידוכים).

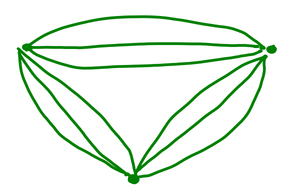
משפט Vizing (1964):

אם G גרף פשוט, אזי

$$\Delta(G) \le \chi'(G) \le \Delta(G)+1.$$

מה קורה אם G אינו פשוט:

(דוגמה של Shannon)

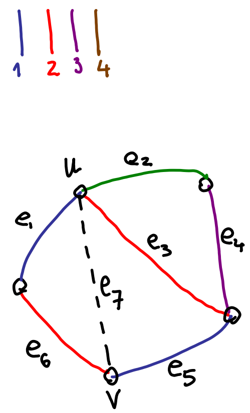


$\chi'(G) = \frac{3}{2}\cdot\Delta(G)$

הכללה: (Vizing)

$$\chi'(G) \le \Delta(G) + \mu(G)$$

כאשר $\mu(G) =$ מקס' ריבוי של קשת ב- G.



0) קובע תקציב של $\Delta+1$ צבעים.

1) קובע סדר לקשתות $e_1, e_2, \dots$

2) צביעה ע״י הרחבה.

אחרי שצבעה $\{e_1, \dots, e_i\}$ צביעה כהלכה, מנסה לצבוע את e_{i+1}.

דוגמה: $e_1, \dots, e_6$ צבועות כהלכה.

כעת מנסה לצבוע את e_7:

- יש צבע שלא נוגע ב-u (חום)

האם חום חוקי? כן: צבע את e_7 בחום!

לא: כבר נוגעת קשת חומה של v.

קביעת מסלול צביעה מחודשת בעת הוספת הקשת (u,v):

$a_0 \triangleq$ free color in u

$v_0 \leftarrow v$

$i \leftarrow 0$

while ($a_i \notin \{a_j \mid j<i\}$)

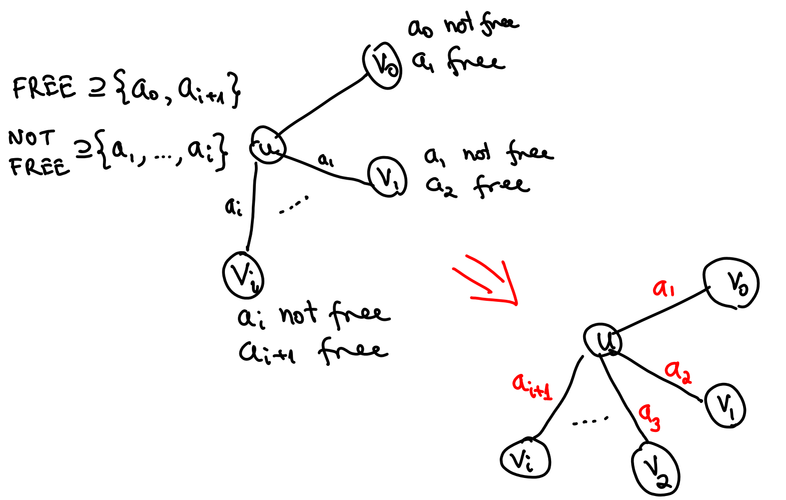
- $a_{i+1} \leftarrow$ free color in v_i
- If a_{i+1} free in u then & break.
- $v_{i+1} \leftarrow$ neighbor of u s.t. $color(u, v_{i+1}) = a_{i+1}$
- $i \leftarrow i+1$

העדף את a_0 אם פנוי ב v_i

Recolor (Recall: $a_i \in \{a_j \mid j<i\}$)

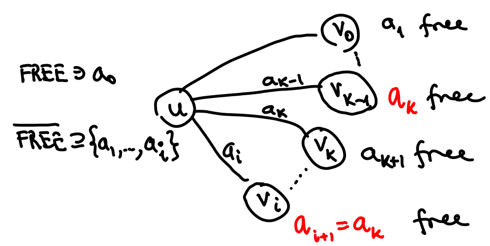
Shift

(invariants:
1) $a_0, \dots, a_i$ are distinct colors
2) $\{a_1, \dots, a_i\} \cap Free(u) = \phi$
3) $\{a_0, a_{i+1}\} \subseteq Free(u)$)



Recolor: $\{a_0, \dots a_i\}$ distinct colors, $a_{i+1} = a_k$ $(k<i)$

דוגמא:



<u>הערות</u>

1) $a_{i+1} = a_k$ פנוי גם ב v_i וגם ב v_{k-1}.

2) הקשת (u, v_k) צבועה בצבע $a_k = a_{i+1}$.

שים לב: $a_0 \notin Free(v_i)$, אחרת v_i היה מצבע a_0
ואז מבצע SHIFT.

כיון ש-a_0 אינו פנוי ב-v_i, נחפש מסלול מקסימלי P שמתחיל ב-v_i, הקשת הראשונה בצבע a_0, וצבעי הקשתות עליו a_0 או a_k.

- צביעה ⇐ { צבעי הקשתות במסלול מתחלפים. יש רק מסלול יחיד כזה.

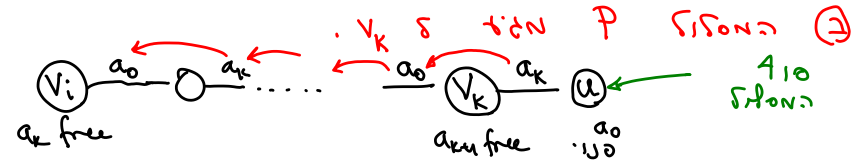
נחלק למקרים:

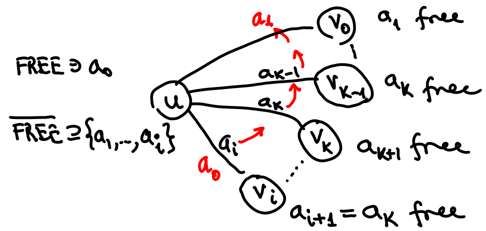
① P מגיע ל-V_k

② P מגיע ל-V_{k-1}

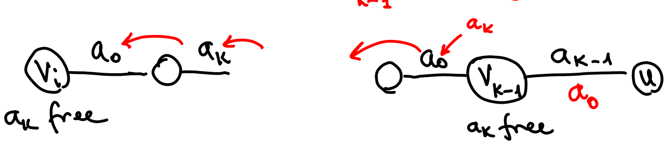
③ אחרת

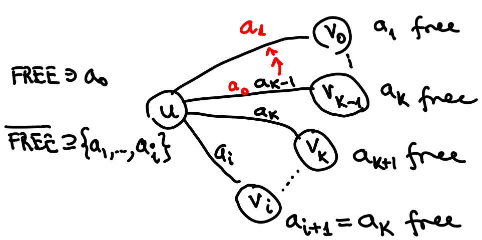
ב) המסלול P מגיע ל-V_k.





ג) המסלול P מגיע ל-V_{k-1}

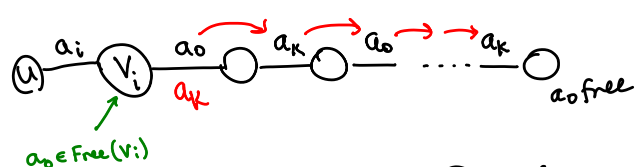


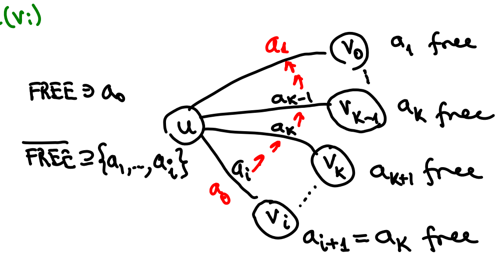


ד) אחרת: P לא מגיע ל-V_{k-1} או V_k.

לא יכול להגיע ל-u. (למה?)

לא יכול להגיע שוב ל-V_i. (למה?)



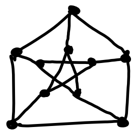


שאלות:

① חשבו את מספר הצביעה בקשתות של הגרף הבא:

$|V| = 10$

$|E| = 15$



② הוכיחו שאם G גרף דו-צדדי אז $\chi'(G) = \Delta(G)$.

(האם ההוכחה תקפה גם לגרפים לא פשוטים - עם קשתות מקבילות?)

③ בליגת הכדורגל משתתפות 2n קבוצות.

משך העונה 2n-1 שבועות.

כל קבוצה צריכה לשחק נגד כל שאר הקבוצות.

כל הקבוצות משחקות באותו היום בשבוע.

כל קבוצה משחקת משחק יחיד בשבוע.

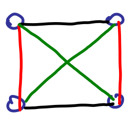
הציעו תכנון של העונה העומד בכל הדרישות.

④ אלג' אמנון לשידוך

רמז:

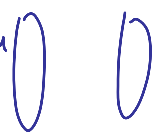
$n=1$

$n=2$



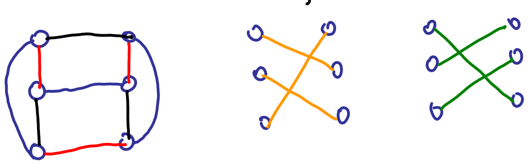
$n = 2^k$

2^{k-1} 2^{k-1}



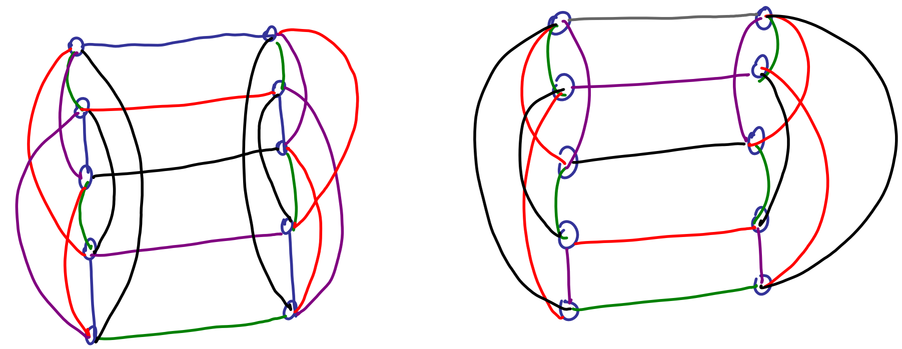
coloring : $\underbrace{color(2^{k-1}) \cup color(2^{k-1})}_{\frac{n}{2}-1 \text{ צבעים}}$ + $\underbrace{2^{k-1} \text{ שידוכים בקלות}}_{n/2 \text{ צבעים}}$

מה קורה עבור n שאינו חזקה של 2?



$n=3$

איך מכלילים לכל n?



$f_i : [5] \to [5]$

1) f_i חח"ע

2) $\forall i_1 \forall i_2 \forall j \quad f_{i_1}(j) \neq f_{i_2}(j)$