12/5/2011

אלגוריתמים ברשתות

מציאת שידוך מקסימום (בגודל) בגרף כללי

הגדרה: יהי M שידוך. מסלול p נקרא **מסלול הרחבה** אם הוא מקיים:

(א) p מסלול מתחלף: $p = v_0 \overset{e_1}{\frown} v_1 \overset{e_2}{\frown} v_2 \cdots \overset{e_k}{\frown} v_k$

כל קשת שניה לאורך p שייכת ל M.

(ב) הקשת הראשונה והאחרונה ב p אינן ב M.

מסלול הרחבה: (1) אורך אי-זוגי

(2) מתחיל ונגמר בצמתים חשופים.

(3) הרחבה:

$$M \leftarrow \left(M \setminus E(p_{even})\right) \cup E(p_{odd})$$

מגדילה את M בקשת אחת.

מסקנה: אם p מסלול הרחבה ביחס לשידוך M, אזי $M \oplus E(p)$ הוא שידוך בגודל $|M|+1$.

הוכחה: p מסלול באורך אי-זוגי, והקשתות הזוגיות שלו ב M, ולכן $|M \oplus E(p)| = |M|+1$.

כעת נראה ש $M' \triangleq M \oplus E(p)$ שידוך.

$$M \oplus E(p) = \left(M \setminus E(p)\right) \cup \left(E(p) \setminus M\right)$$

אם $e_1, e_2 \in M'$ חולקות צומת אז נחלק למקרים:

(1) $e_1, e_2 \in M \setminus E(p)$

(2) $e_1, e_2 \in E(p) \setminus M$

(3) $e_1 \in M \setminus E(p)$ & $e_2 \in E(p) \setminus M$.

ובכל המקרים נקבל סתירה. ☒

משפט (Berge, Norman & Rabin): M שידוך מירבי אמ"מ לא קיים מסלול הרחבה ביחס ל M.

הוכחה: ($\Leftarrow$) אם קיים מסלול הרחבה, אז ראינו ש M לא מירבי.

($\Rightarrow$) אם M לא מירבי, יהי M^* שידוך מירבי $|M^*| > |M|$.

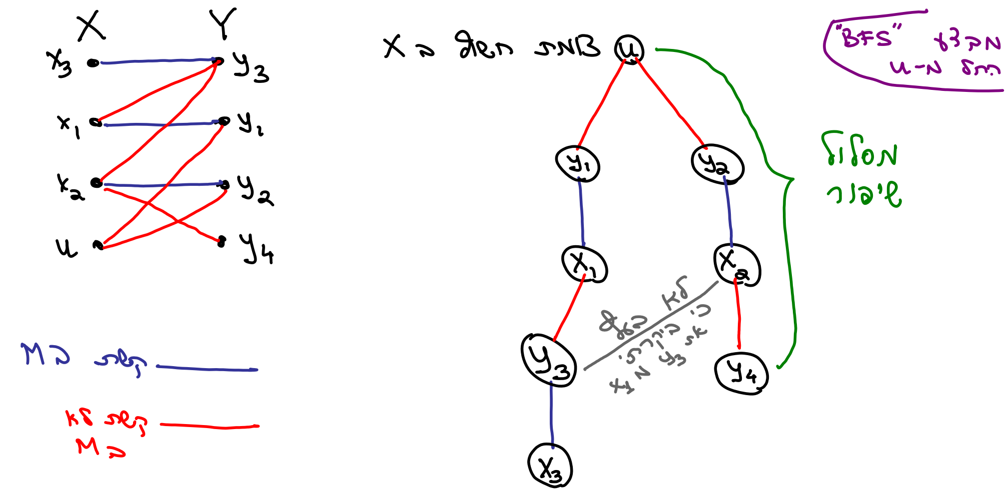
כעת נשתמש ב M^* למציאת מסלול הרחבה.

נתבונן בקשתות ההפרש הסימטרי: $D = M \oplus M^*$

כל צומת נשען על לכל היותר 2 קשתות D, ולכן הגרף המושרה ע"י D מקיים: כל רכיב קשירות הוא מסלול או מעגל. וכל מסלול/מעגל הוא מתחלף.

במעגל $\Gamma \subseteq D$ נקבל $|\Gamma \cap M^*| = |\Gamma \cap M|$.

מכאן שקיים מסלול $p \subseteq D$ עבורו $|p \cap M| < |p \cap M^*|$. ☒



שורש: צומת חשוף ב-X

שכבות מתחלפות: אדום | כחול (לא בשידוך/בשידוך)

לא סוגר מעגל: מסמן צמתים שכבר ביקרנו בהם.

מסקנות:

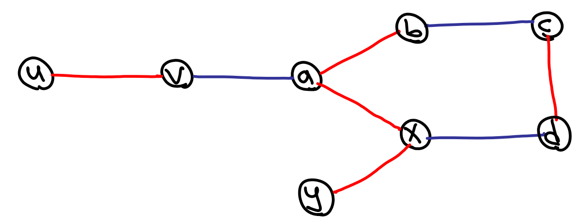
① לכל שידוך M, קיים שידוך מירבי M^* המקיים:

לכל $v \in V$: v לא חשוף ביחס ל M $\Leftarrow$ v לא חשוף ביחס ל M^*.

② אם ידוע למצוא מסלול הרחבה, אז ידוע למצוא שידוך מקסימום.

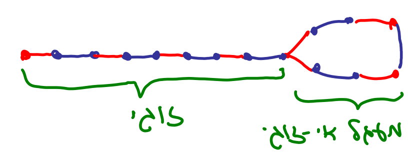
[אחרי כל מסלול הרחבה השידוך גודל ב-1, ומס' ההרחבות בשידוך חסום ע"י $\frac{n}{2}$].

נעבור לגרפים דו-צדדיים (המקרה הקל).



- ראשית נקבל קשת cd בין 2 צמתים באותה שכבה של העץ. (ונתעלם ממנה כי ביקרנו בקצה השני)
- נחמיץ מסלול הרחבה: u—v—a—b—c—d—x—y.

מקרה הקושי:



- אם גידול עץ מגיע לצומת חשוף ב-Y, אז מצאנו מסלול שיפור.
- אם גידול עץ נעצר כאשר כל העלים לא חשופים (בX) אז עבור לצומת חשוף הבא שטרם ביקרנו בו.

עץ הונגרי: עץ מתחלף מקסימלי עם שורש חשוף וכל העלים לא חשופים.

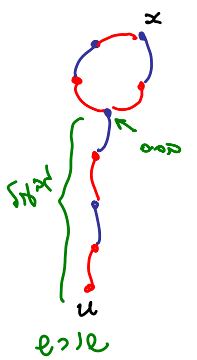
- טענה: אם כל העצים הונגריים, אז M שידוך מקסימום.

(בכל עץ הונגרי: כיסוי בצמתים = שידוך, ולכן גם אופטימלי)

מה הקשר לאלג' של Ford & Fulk.?

מה קורה בגרף שאינו דו-צדדי?

הגדרה: יהי M שידוך ו- u צומת חשוף.



פרח flower
איחוד של 2 מסלולים מתחלפים (פשוטים) P_1, P_2 מ- u ל- x כאשר $|P_1|$ זוגי, ו- $|P_2|$ אי-זוגי.
(u חשוף $\Leftarrow$ קשת ראשונה ב- P_1 וב- P_2 לא בשידוך)

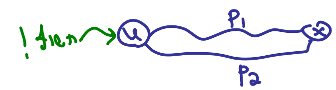
גבעול stem
הרישא המקסימלית המשותפת של P_1, P_2
[מספר הקשתות בגבעול תמיד זוגי. יכול להיות אפס]

בסיס base
הצומת הראשון שבו P_1 P_2 מתפצלים.
[קשת הגבעול שנוגעת על הבסיס שייכת לשידוך.]

פריחה blossom
המעגל האי-זוגי $P_1 \oplus P_2$.

איך מגיעים מ-2 מסלולים P_1, P_2 המקיימים את התנאים:

1)



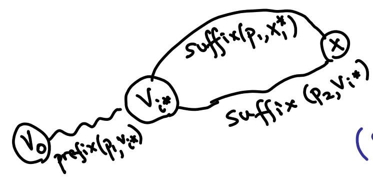
2) 2 המסלולים מתחלפים.

3) $|P_1|, |P_2|$ בזוגיות שונה

לפרח?

__תשובה:__ נסמן $P_2 = v_0 - v_1 - \cdots - v_\ell$ כאשר $u = v_0$, $x = v_\ell$.

נגדיר $i^* \triangleq \operatorname{argmax}\{i < \ell : v_i \in P_1\}$.



נגדיר $\tilde{P}_2 = \text{prefix}(P_1, V_{i^*}) \circ \text{suffix}(P_2, V_{i^*})$.

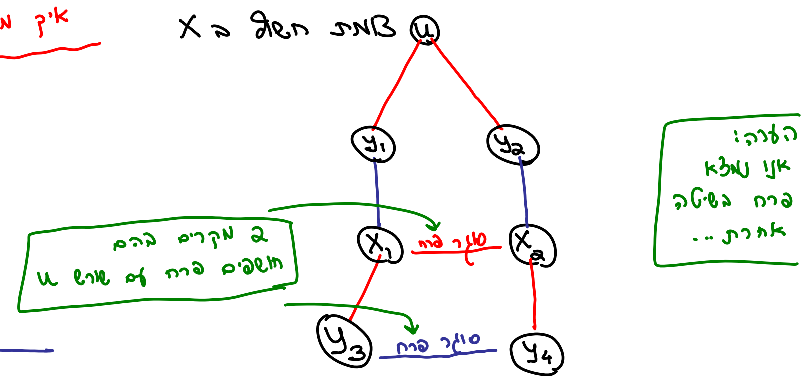
כעת, ל- $P_1, \tilde{P}_2$ יש רישא משותפת (הגבעול)

וסיפות זרות בקשתות (הפריחה).

צריך להראות: גבעול זוגי, סיפות בזוגיות שונה.

מסלולים מתחלפים $\Leftarrow$ 2 הקשתות היוצאות מ V_{i^*} ב P_1 וב P_2 אינן ב M...

איך מצהירים פרח?



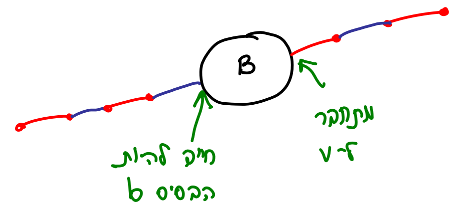
בצע "BFS" החל מצומת חשוף u.
שכבות מתחלפות: אדום | כחול (לא בשידוך/בשידוך)
לא סוגר מעגל אם הקשת מחברת שכבות מסוגים "שונים"
או קשת לא ב M אבל BFS יוצא מהקודקוד ע"י קשתות M.

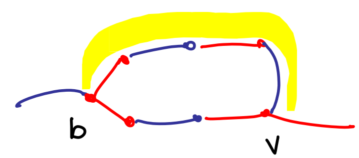
$G_{/B}$: הגרף המתקבל מ-G ע"י כיווץ B.

משפט Edmonds:
יהי M שידוך ב G ו- B פריחה (בפרח F) ביחס ל M.
קיים מסלול הרחבה ב G ביחס ל M שלפם
קיים מסלול הרחבה ב $G_{/B}$ ביחס ל $M \setminus B$.

טענת עזר:
קיים מסלול באורך זוגי מהשורש u לכל צומת בפריחה.
יתרה מזאת, מסלול זה נכנס לצומת בפריחה עם קשת של M.

אם p מסלול הרחבה ב $G_{/B}$ ביחס ל $M \setminus B$ אז



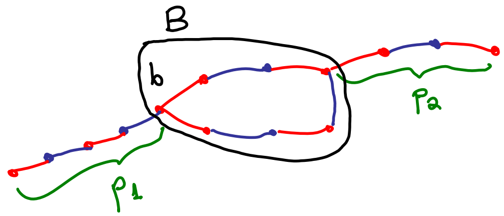


הוכחת המשפט:

נתחיל בהוכחה שאם p מסלול הרחבה ב $G_{/B}$ ביחס ל $M \setminus B$, אז קיים מסלול הרחבה ב G ביחס ל M.

אם p אינו חולף דרך הצומת שמתקבל מכיווץ B, אז p הוא המסלול המבוקש ב G.

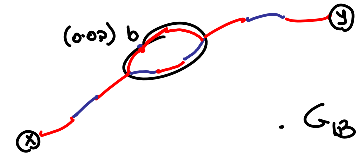
אחרת

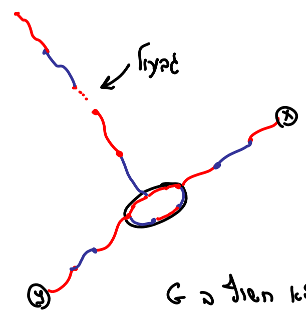


במקרה זה נבחין בין 2 מקרים:

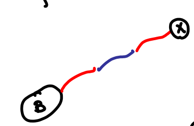
(I) אם b חשוף ב G, אז B חשוף ב $G_{/B}$, ואז הקטע מ B לקצה של p הוא מסלול הרחבה ב $G_{/B}$.

(II) אם b לא חשוף ב G, אז יש גבעול שמסתיים בצומת חשוף u.
נבנה מסלול הרחבה ב $G_{/B}$ ע"י שירשור הגבעול עם הקטע של B לקצה של p.





(II) b לא חשוף ב G ⇐ יש גבעול.



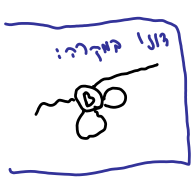
(I) b חשוף ב G ⇐ B חשוף ב $G_{/B}$

יהי p מסלול הרחבה ב G, נמצא מסלול הרחבה ב $G_{/B}$:

אם $p \cap E(B) = \emptyset$, אז p גם מסלול הרחבה ב $p_{/B}$.

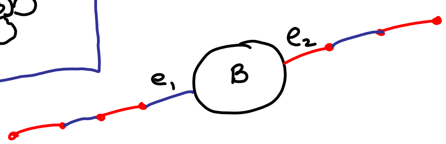
אחרת, $p_{/B}$ מכיל את B כצומת פנימי או כקצה.

אם B קצה של $p_{/B}$, אז $p_{/B}$ מסלול הרחבה ב $G_{/B}$.



נניח ש B צומת פנימי ב $p_{/B}$.

אם e_1, e_2 שונות צבע, כלומר אחת בשידוך והשניה לא, אז $p_{/B}$ מסלול הרחבה ב $G_{/B}$.



נשים לב, שלא יתכן $e_1, e_2 \in M$. הסיבה היא ש B היא פריחה, ולכן כל צמתי B (למעט הבסיס) נשואים ע"י קשתי $M \cap E(B)$.

נשאר המקרה: $e_1, e_2 \notin M$.

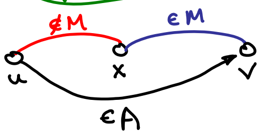
נסמן: M שידוך

X קב' צמתים חשופים ביחס ל M.

מסלול X−X: מסלול $P=(v_0,\dots,v_t)$ שמקיים $v_0,v_t\in X$.

לאו דווקא מסלול פשוט!

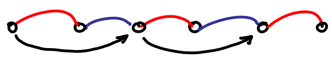
טענה: קל לחשב מסלול X−X מתחלף קצר ביותר.



הוכחה: נבנה גרף מכוון שמתאים למסלולים באורך 2 (קשת לא בשידוך + קשת בשידוך).

יש התאמה על בין מסלולי X−X מתחלפים לבין מסלולים בגרף המכוון מ X ל N(X).

שכנים של צמתים חשופים



ההתאמה "משמרת אורך" במובן: אם $p\longmapsto p'$ אז $l(p)=2l(p')+1$.

⇐ נחשב מסלול קצר ביותר בגרף המכוון מ X ל N(X). ונמצא מסלול X−X מתחלף קצר ביותר (אולי לא פשוט)

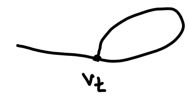
טענה: אם $P=(v_0,\dots,v_t)$ הוא מסלול X−X מתחלף קצר ביותר, אז P הוא מסלול הרחבה או שרישא שלו היא פרח.

הוכחה: אם P מסלול פשוט, אז הוא מסלול הרחבה.

אחרת P אינו פשוט.

אבחנות: (1) לכל $v\in p$: $\deg_p(v)<4$.

כי אחרת יש 2 קשתות שידוך שנוגעות על v.



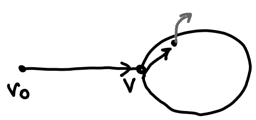
(2) לא יתכן $\deg_p(v_t)=3$

כי אז v_t אינו חשוף.

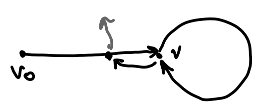
מסקנה: נקבל $\deg_p(v)=3 \Rightarrow$ v צומת פנימי במסלול.

יהי v הצומת של האינדקס הקטן ביותר עבורו $\deg_p(v)>2$.

האפשרויות:

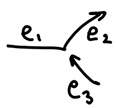


(I)



(II)

(I) נקצר את p ע"י ביטול המעגל שחוזר ל-v. סתירה למינימאליות p.



(II) אם המעגל זוגי אז נקבל סתירה.

כי e_1,e_2 שוני צבע (עוקבות במסלול)

e_2,e_3 שוני צבע (מעגל זוגי)

e_3,e_1 שוני צבע (כי המסלול p ממשיך מ e_3 ל $rev(e_1)$).

לכן המעגל אי-זוגי. יתרה מזאת e_3,e_2 שווי צבע ולכן $e_2,e_3\notin M$. ולכן $e_1\in M$. לכן $v_0\to v$ הוא מסלול באורך זוגי.

איפה אלג' לזה אם היא 4? (התשובה 13-3.3.23 במהופך מתחתית השקף)

אלגוריתם למציאת מסלול הרחבה:

קלט: $M\subseteq E$ שידוך.

פלט: מסלול הרחבה או הכרזה שאין כזה.

שלב: 1) חשב מסלול X−X מתחלף קצר ביותר P.

אם $l(P)=0$: פלוט אין מסלול הרחבה.

2) אם P מסלול פשוט: פלוט את P.

3) מצא רישא של P שהיא פרח.

(רישא מינימאלית שאינה פשוטה)

כווץ את הפריחה $B\subseteq P$.

קרא לאלג' רקורסיבית בגרף $G_{/B}$ עם השידוך $M_{/B}$.

יהי $\hat{P}$ מסלול ההרחבה המוחזר.

הרחב את $\hat{P}$ למסלול הרחבה ב G.

[illegible]

שאלה: הוכח כי ניתן למצוא שידוך בגודל מירבי

בסיבוכיות $O(n^2 m)$.