19/5/11

אלגוריתמים ברשתות

מבוא לתכנות ליניארי:

הגיאומטריה של תכנות ליניארי.

תהי: $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ פונקציה.

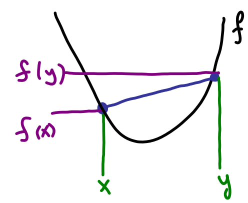
f היא **ליניארית** אם $f(x) = Ax$

עבור $A \in M_{n \times m}$

f היא **קמורה** (convex) אם $n=1$ וכן

$\forall x,y \in \mathbb{R}^m \ \forall \lambda \in [0,1]$:

$$\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \geq f(\lambda x + (1-\lambda) y)$$



גיאומטרית: הקטע בין $f(x)$ ל $f(y)$ לא יורד מתחת לגרף של f.

f היא **קעורה** (concave) אם $-f$ קמורה.

תרגיל: אם $f_1,\dots,f_m$ קמורות אזי

$$f(x) \triangleq \max\{f_1(x),\dots,f_m(x)\}$$

גם כן קמורה.

תזכורת מאלגברה ליניארית:

תהי A מטריצה ריבועית $n \times n$. הטענות הבאות שקולות:

1. A הפיכה.
2. A^t הפיכה
3. $\det(A) \neq 0$
4. שורות A בת"ל ליניארית
5. עמודות A בת"ל ליניארית
6. לכל $b \in \mathbb{R}^n$ יש למערכת $Ax=b$ פתרון יחיד.
7. קיים $b \in \mathbb{R}^n$ עבורו למערכת $Ax=b$ יש פתרון יחיד.

משפט

יהי S תת מרחב לינארי הנפרש ע"י $x^1,\dots,x^k$.

נניח $\dim(S)=m$.

① קיים בסיס של S המורכב מ-m וקטורים מהקבוצה $\{x^1,\dots,x^k\}$

② אם $l\le m$ ונתון $x^1,\dots,x^l$ בת"ל, אז ניתן להשלים לבסיס ע"י $m-l$ וקטורים מהקבוצה $\{x^{l+1},\dots,x^k\}$.

תת מרחב וקטורי: $U\subseteq\mathbb{R}^n$ היא תת מרחב אם

$$\forall a,b\in\mathbb{R}\ \forall x,y\in U:\ ax+by\in U$$

המרחב הנפרש ע"י $x^1\dots x^k\in\mathbb{R}^n$

$$\left\{\sum_{i=1}^{k} a_i x^i \;\middle|\; a_1,\dots,a_k\in\mathbb{R}\right\}$$

אי-תלות: $x^1\dots x^k\in\mathbb{R}^n$ הם בת"ל לינארית

אם: $\forall a_1,\dots,a_k\in\mathbb{R}:\ \sum_{i=1}^{k} a_i x^i=0 \Rightarrow a_1=a_2=\dots=a_k=0$

מימד של תת מרחב U: גודל מקסימלי של קבוצה בת"ל לינארית ב-U. מסומן ע"י $\dim(U)$.

בסיס: קב' בת"ל של וקטורים ב-U שגודלה $\dim(U)$ וקטורים.

הגדרה: **פוליהדרון** polyhedron $\{x\in\mathbb{R}^n \mid Ax\ge b\}$

$S\subseteq\mathbb{R}^n$ **חסומה** אם קיים קבוע K כך שלכל $x\in S$: $\|x\|\le K$.

היפר מישור $\{x\in\mathbb{R}^n:\ a^tx=b\}$

חצי מרחב $\{x\in\mathbb{R}^n:\ a^tx\ge b\}$

הערות: ① a ניצב להיפר מישור $\{x\mid a^tx=b\}$

② פוליהדרון הוא חיתוך של חצאי מרחב.

③ היפר מישור הוא מרחב אפיני ממימד $n-1$.

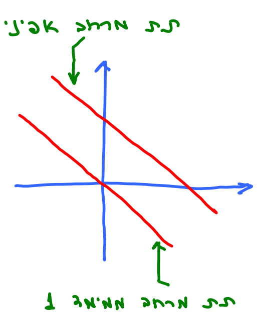
תת מרחב אפיני

$$S=S_0+x^0$$

$S_0\subseteq\mathbb{R}^n$ - תת מרחב וקטורי.

$x^0\in\mathbb{R}^n$ - וקטור

מימד $S \triangleq$ מימד S_0.



קבוצות קמורות

$S \subseteq \mathbb{R}^n$ היא **קמורה** אם

$$\forall x,y \in S \ \ \forall \lambda \in [0,1]:$$

$$\lambda \cdot x + (1-\lambda) y \in S$$

צירוף קמור: $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i$

כאשר $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$, $\forall i: \lambda_i \ge 0$.

קמור: בהנתן $x^1,\dots,x^k \in \mathbb{R}^n$ הקמור שלהם הוא הקבוצה

convex hull

$$\left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i \ \middle|\ \forall i: \lambda_i \ge 0, \ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \right\}$$

משפט:

① חיתוך של קבוצות קמורות הוא קמור.

② כל פוליהדרון הוא קמור.

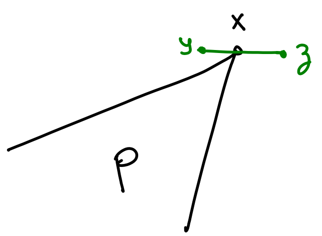
③ כל צירוף קמור של מס' סופי של איברי קבוצה קמורה שייך לקבוצה הקמורה.

④ הקמור של מס' סופי של וקטורים הוא קבוצה קמורה.

הגדרה: יהי $P = \{x : Ax \ge b\}$ פוליהדרון.
נקודה $x \in P$ נקראת **נק' קיצון** אם לא קיימות
נקודות $y,z \in P$ ומספר $\lambda \in [0,1]$

① $y \ne x$ וגם $z \ne x$.

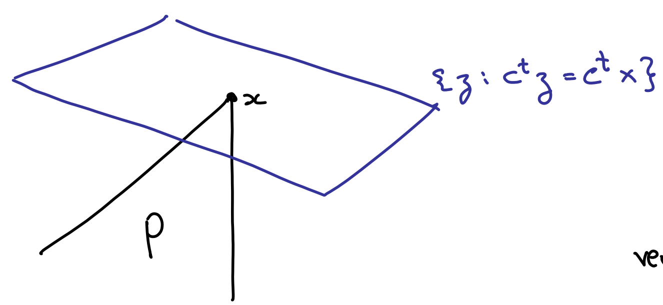
② $x = \lambda y + (1-\lambda) z$



נק' קיצון = extreme point

הגדרה: $x \in P$ נקרא **קודקוד** אם קיים וקטור c
המקיים:

$$\forall y \in P \setminus \{x\}: \ c^t y < c^t x$$



קודקוד = vertex

$n =$ מס' עמודות A

נסתכל במערכת אי שוויונות $Ax \ge b$.

אם אי-שוויון מתקיים בשוויון, נאמר שאי השוויון **פעיל או הדוק**

משפט: יהי $x^* \in \mathbb{R}^n$ ותהי $I = \{i \mid a_i x^* = b_i\}$.

אזי הטענות הבאות שקולות

① הקבוצה $\{a_i \mid i \in I\}$ מכילה n וקטורים בת"ל.

② הקבוצה $\{a_i \mid i \in I\}$ פורשת את $\mathbb{R}^n$.

③ למערכת השוויונות $a_i^t x = b_i \ \forall i \in I$ יש פתרון יחיד.

<u>הגדרה:</u> יהי $P \subseteq \mathbb{R}^n$ פוליהדרון המוגדר ע"י אילוצי שוויון ואילוצי אי שוויון.

① x^* הוא **פתרון בסיסי** אם הוא מספק את כל אילוצי השוויון, וכן מבין האילוצים הפעילים יש n אילוצים בת"ל. (יתכן שאילוצי אי-שוויון לא מתקיימים!)

② אם x^* הוא פתרון בסיסי וכל האילוצים מתקיימים, אזי x^* הוא **פתרון בסיסי פיזיבילי**

פתרון בסיסי פיזיבילי = basic feasible solution (bfs)

x bfs $\Rightarrow$ $x \in P$.

<u>משפט</u> יהי $P \subseteq \mathbb{R}^n$ פוליהדרון לא ריק.

יהי $x^* \in P$.

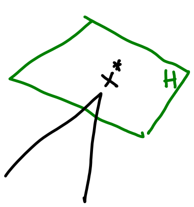
שלוש הטענות הבאות שקולות:

① x^* קודקוד

② x^* נקודת קיצון

③ x^* פתרון בסיסי פיזיבילי

הערה: בה"כ P מוגדר ע"י אילוצי שוויון ($a_i^T x = b_i$) וע"י אילוצי $\geq$ ($a_i^T x \ge b_i$).



קודקוד $\Leftarrow$ נקודת קיצון:

יהי $H = \{z \mid c^t z = c^t x^*\}$ מישור התומך ב-x^*.

כלומר $\forall x \in P \setminus \{x^*\} : c^t x < c^t x^*$

אם x^* בפנים הקטע $[y,z] \subseteq P$ (עבור $y \neq z$)

אז y,z באותו צד של H, ולכן גם הקטע $[y,z]$, ולכן גם x^*. סתירה.

נק' קיצון $\Leftarrow$ פתרון פיזיבילי בסיסי:

בדרך השלילה, נניח x^* אינו פתרון בסיסי פיזיבילי.

לפיכך $I \triangleq \{i \mid a_i x^* = b_i\}$

<u>אינו</u> מכיל n אילוצים בת"ל.

יהי $d \in \mathrm{Span}\{a_i\}_{i \in I}^{\perp} \setminus \{\vec{0}\}$ (כלומר: $\forall i \in I \ a_i^T d = 0$).

נבחר $\varepsilon > 0$ קטן ונגדיר $y \triangleq x^* + \varepsilon d$, $z = x^* - \varepsilon d$.

נשים לב:

$$\forall i \in I : \quad a_i^t \cdot y = a_i^t x^* = b_i$$

$$\forall j \notin I : \quad a_j^t y = \underbrace{a_j^t x^*}_{> b_j} + \underbrace{a_j^t (\varepsilon d)}_{\text{קטן אם } \varepsilon \text{ קטן}} > b_j$$

ולכן $y \in P$, ובאותו אופן $z \in P$. ולכן x^* אינה נק' קיצון. ∎

פתרון בסיסי פיזיבילי $\Leftarrow$ קודקוד:

יהי x^* פתרון בסיסי פיזיבילי. נגדיר $I \triangleq \{i \mid a_i^t x^* = b_i\}$

וכן $c \triangleq \sum_{i \in I} a_i$.

נקבל: $c^t x^* = \sum_I a_i^t x^* = \sum_I b_i \triangleq \beta$

ולכל $x \in P$: $c^t x = \sum_I a_i^t x \geq \sum_I b_i = \beta$

ולכן $c^t x = \beta \iff$ לכל $i \in I$: $a_i^t x = b_i$.

אבל למערכת $\{a_i^t x = b_i\}$ יש פתרון יחיד (כי $\{a_i\}_I$ מכיל בסיס). הפתרון היחיד הוא x^*.

משטח המישור $H = \{z \mid c^t z = \beta\}$ מקיים:

① $H \cap P = \{x^*\}$ וכן $\forall x \in P \setminus \{x^*\} : c^t x > \beta$.

ולכן x^* הוא קודקוד.

יתרה מזאת x^* הוא הפתרון היחיד של התכנית הלינארית: $\min\{c^t x \mid Ax \geq b\}$

(כלומר: לכל פתרון בסיסי פיזיבילי x^* קיימת פונקציית מטרה: $f(x) = c^t x$ שעבורה x^* מהווה מינימום מבין נק' P.)

שאלה: כמה פתרונות בסיסיים יכולים להיות?