26/5/11

# אלגוריתמים ברשתות

המשך מבוא לתכנות ליניארי:

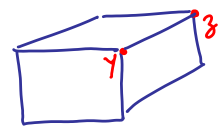
- פתרונות בסיסיים
- ניוון (degeneracy)
- קיום נק' קיצון
- אופטימליות של נק' קיצון.
- הכללה: אלמינציה בשיטת Fourier – Motzkin

**הגדרה:** 2 פתרונות בסיסיים $y \neq z$ נקראים שכנים אם $I_y \cap I_z$ היא קבוצה של $n-1$ אילוצים בת"ל, כאשר

$$I_y \triangleq \{ a_i \mid a_i y = b_i \}$$

$$.I_z \triangleq \{ a_i \mid a_i z = b_i \}$$

הערה: הבסיס "המתאים" ל- $z$ מתקבל ע"י החלפת אילוץ אחד בבסיס "המתאים" ל- $y$.




## צורה סטנדרטית

$$P = \{ x \mid Ax = b,\ x \geq 0 \}$$

נסמן: $n$ - מס' עמודות $A$, $m$ - מס' שורות $A$.

בד"כ מניחים: שורות $A$ בת"ל (ולכן $m \leq n$).

אם $x^*$ פתרון בסיסי אז $Ax^* = b$ וכן $n-m$ אילוצי סימן מתקיימים בשוויון. כלומר: ב $x^*$ יש לפחות $n-m$ רכיבים ששווים $0$.

**משפט:** (ביחס לצורה סטנדרטית)
$x^*$ פתרון בסיסי אמ"מ $Ax^* = b$ וכן יש $m$ אינדקסים $\{B(i)\}_{i=1}^{m}$ המקיימים:
① העמודות $\{A^{B(i)}\}_{i=1}^{m}$ בת"ל.
וכן ② $i \notin \{B(1), \dots, B(m)\} \Longrightarrow x_i^* = 0$

**הוכחה:** ($\Longleftarrow$) בה"כ $\{B(i)\}_{i=1}^{m} = \{1, \dots, m\}$.

ואז נסתכל במערכת השוויונים:

$$\begin{array}{rl} \begin{array}{r} m \\ n-m \end{array} & \left(\begin{array}{c|c} A^1 \cdots A^m & 0 \\ \hline 0 & \begin{smallmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{smallmatrix} \end{array}\right) \cdot x = \begin{pmatrix} b \\ 0^{n-m} \end{pmatrix} \\ & \qquad m \qquad\qquad n-m \end{array}$$

$x^*$ מקיים את $n$ המשוואות

כיון ש $A^1 \dots A^m$ בת"ל, m הרכיבים הראשונים של כל פתרון נקבעים באופן יחיד.

n-m הרכיבים האחרונים של כל פתרון הם אפס.

דרגת המטריצה היא n, ולכן קב' האילוצים הפעילים ב-$x^*$ מכילה בסיס, כנדרש.

$\Leftarrow$ נסמן $Z \triangleq \{i \mid x^*_i = 0\}$.

כיון ש $x^*$ פתרון בסיסי נקבל שקב' האילוצים A עם וקטורי היחידה $\{e^i\}_{i\in Z}$ מכילים בסיס.

ולכן למערכת השוויונים

$$\begin{pmatrix} A \\ \{e^i\}_{i\in Z}\end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} b \\ 0^{|Z|}\end{pmatrix}$$

יש פתרון יחיד (דהיינו $x^*$).

כמובן, לכל $i \in Z$ : $x^*_i = 0$.

נסתכל על המערכת: $\{B(1) \dots B(n-|Z|)\} = [1..n] \setminus Z$

$$\left(A^{B(1)} \dots A^{B(n-|Z|)}\right) \tilde{x} = b$$

למערכת זו יש פתרון יחיד (ה"ל $x^*$).

ולכן העמודות הן בת"ל. משמע $rank(A) = m \geq n-|Z|$

$\Leftarrow$ $n-m \leq |Z|$ (כנדרש בחלק ⓑ).

אם $n-m < |Z|$, אז נרחיב את $A^{B(1)},\dots,A^{B(n-|Z|)}$ לבסיס של $\mathbb{R}^m$ ע"י הוספת עמודות עם אינדקסים ב Z.

## בניית פתרונות בסיסיים

① מצא m עמודות בת"ל ב-A. נסמנם $A^{B(1)} \dots A^{B(m)}$.

② קבע $x^*_i = 0$ לכל $i \notin \{B(1),\dots,B(m)\}$.

③ פתור את השוויונים $\left(A^{B(1)} \dots A^{B(m)}\right) \tilde{X} = b$

או באופן שקול:

$$(*) \quad \begin{pmatrix} A \\ \hline e^{\bar{B}(1)} \\ \vdots \\ e^{\bar{B}(n-m)} \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} b \\ 0^{n-m} \end{pmatrix}$$

אם פתרון בסיס x מקיים $x \geq 0$, אז הוא גם פיזיבילי.

## מינוח

עבור פתרון בסיסי x, הרכיבים $x_{B(1)} \dots x_{B(m)}$ נקראים משתנים בסיסיים (או משתני בסיס).

שאר הרכיבים הם לא-בסיסיים.

העמודות $A^{B(1)} \dots A^{B(m)}$ נקראות עמודות הבסיס, ומהוות בסיס של $\mathbb{R}^m$.

תת-קבוצה של m עמודות בת"ל נקראת בסיס.

ונתייחס לבסיסים שמתקבלים מתת-קבוצות שונות כשונים.

המטריצה $m \times m$ המתקבלת מעמודות בסיס נקראת מטריצת בסיס. נסמן $B = \left(A^{B(1)} \dots A^{B(m)}\right)$ מטריצת בסיס.

וכמו כן $x^B = \begin{pmatrix} x_{B(1)} \\ \vdots \\ x_{B(m)} \end{pmatrix}$

ואז B הפיכה ומקיימת:

$$B \cdot x^B = b$$

ולכן

$$\boxed{x^B = B^{-1} \cdot b}.$$

הערות

① בסיסים שונים יכולים להגדיר פתרונות בסיסיים זהים. לדוגמא, אם $b=0$, אז x פתרון בסיסי $\Leftarrow$ $x = 0^n$.

② אם $x^*, y^*$ פתרונות בסיסיים שכנים, אז אפשר למצוא בסיסים מתאימים $B_{x^*}, B_{y^*}$ הנבדלים רק בוקטור אחד.

הוכחה: אם ב $x^*$ וב $y^*$ יש בדיוק $n-m$ אפסים. אז הבסיס $B_{x^*}$ הוא $\{i : x_i^* \gneq 0\}$ ובאופן דומה לגבי $B_{y^*}$. אבל מרחק "המינג" בין $\bar{B}_{x^*} \triangleq \{i : x_i^* = 0\}$ ובין $\bar{B}_{y^*} \triangleq \{i : y_i^* = 0\}$ הוא 2, ולכן גם המרחק בין $B_{x^*}$ ל $B_{y^*}$ הוא 2, כנדרש.

מה קורה אם ב $x^*$ או $y^*$ יש יותר מ $n-m$ אפסים? רמז: חזרו ל (*)

③ טענה: אם פוליהדרון הנתון בצורה סטנדרטית אינו ריק, אזי ניתן להפחית את מטריצת האילוצים כך שיתקבל תיאור של הפוליהדרון בצורה סטנדרטית ויתקיים:

$$\text{rank}(\text{מטריצת האילוצים}) = \text{מס' שורות המטריצה}$$

הוכחה: $P = \{x \mid Ax = b,\ x \geq 0\}$.

A מטריצה $m \times n$ ונניח $k = \text{rank}(A) < m$

בה"כ: השורות $a_1, \dots, a_k$ בת"ל.

נגדיר $Q \triangleq \{x \mid \forall 1 \le i \le k:\ a_i x = b_i \ \&\ x \geq 0\}$

נראה ש $Q = P$:

כמובן $P \subseteq Q$. (למה?)

נראה כי $Q \subseteq P$. נבחר $y \in Q$ ונראה כי $y \in P$.

יהי $k+1 \le j \le m$. כמובן $a_j$ נפרש ע"י k השורות הראשונות:

$$a_j = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i$$

לכל $x \in P$ אז:

$$b_j = a_j x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i b_i \Rightarrow b_j = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i b_i$$

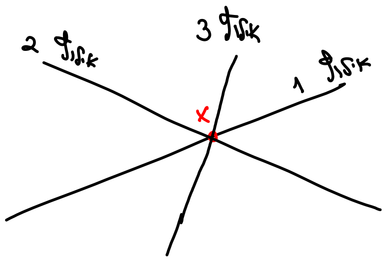
ולכן

$$a_j \cdot y = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i y = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i b_i = b_j$$

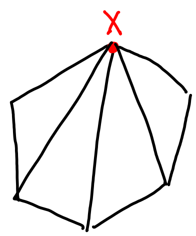
$\Leftarrow y \in P$, כנדרש.

**ניוון:** פתרון בסיסי מנוון אם מס' האילוצים הפעילים ביחס ל-$x$ גדול מ-$n$.

דוגמה: $n=2$




$n=3$:




בצורה סטנדרטית: ניוון $\Longleftrightarrow$ יותר מ $(n-m)$ רכיבים מתאפסים.

פתרון בסיסי נקרא מנוון אם מכיל יותר מ-$(n-m)$ אפסים.

ניוון הוא תלוי בייצוג:

$$P = \{x \mid Ax=b,\ x \geq 0\}$$

$$P = \{x \mid Ax \geq b,\ Ax \leq b,\ x \geq 0\}$$

## האם לכל פוליהדרון יש נק' קיצון?

**הגדרה:** פוליהדרון $P$ מכיל ישר אם קיים $x \in P$, וכן וקטור $d \in \mathbb{R}^n$ המקיימים:

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}: \ x + \lambda d \in P$$

**משפט:** יהי $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq b\}$ פוליהדרון שאינו ריק. 3 התנאים הבאים שקולים:

1. $P$ אינה מכילה ישר.
2. $P$ מכילה נק' קיצון אחת לפחות.
3. $\text{rank}(A) \geq n$.

**הוכחה:** $(2 \Leftarrow 1)$ נראה שהיעדר ישר ב-$P$ מאפשר להפעיל פרוצדורה בעלת התכונה הבאה. בהינתן $x \in P$, אם

$$r(x) \triangleq \text{rank}(\{a_i \mid a_i x = b_i\}) < n$$

נמצא $\hat{x} \in P$ המקיים $r(\hat{x}) > r(x)$.

בסוף נמצא באופן כזה $y \in P$ המקיים $r(y)=n$, ואותו $y$ הוא פתרון בסיסי פיזיבילי, כנדרש.

פירוט: אם $r(x) < n$, יהי $I = \{i : a_i x = b_i\}$. למערכת המשוואות $\{a_i x = 0\}_{i \in I}$ יש פתרון $d \neq 0$.

ונסתכל על הישר $\{x + \lambda d\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$. בסביבה של $x$, הישר מוכל ב-$P$, אבל עבור $|\lambda|$ מספיק גדול, הישר מהדק לפחות עוד אילוץ בכדי לצאת מ-$P$. כלומר: קיים $\lambda^*$ עבורו

$x+\lambda^* d$ נמצא על שפת $P$ ומהדק אילוץ $a_j$ שאינו הדוק ביחס $x$.

כמובן $a_j \notin \mathrm{Span}\{a_i \mid a_i x = b_i\}$, שכן אחרת

$$a_j(x+\lambda^* d) = \underbrace{a_j x}_{\gneq b_j} + \lambda \cdot \underbrace{a_j d}_{=0} \gneq b_j .$$

נגדיר $\hat{x} \triangleq x+\lambda^* d$

ולכן $r(\hat{x}) > r(x)$, כנדרש.

$(3 \Leftarrow 2)$ בנקודת קיצון, האילוצים ההדוקים מכילים בסיס, ולכן $\mathrm{rank}(A)=n$.

$(1 \Leftarrow 3)$ נניח $\overbrace{a_1,\dots,a_m}^{\text{שורות } A}$ בת"ל ונניח בשלילה $P$ מכיל את הישר $x+\lambda d$ עבור וקטור $d \neq 0$.

לפיכך: $\forall i\ \forall \lambda:\quad a_i(x+\lambda d) \geq b_i$

וזה אפשרי רק אם $\forall i: a_i d = 0$.

כלומר $d \in (\mathrm{span}\{a_1 \cdots a_n\})^{\perp}$

אבל $a_1 \cdots a_m$ בת"ל, ולכן $d=0$. סתירה. ☒

הרביע החיובי $\{x \mid x \geq 0\}$ לא מכיל ישר.

כל פוליהדרון בצורה הסטנדרטית מוכל ברביע החיובי.

ולכן כל פוליהדרון בצורה סטנדרטית אינו מכיל ישר,

ולכן יש לו לפחות קודקוד אחד.

**משפט:** תהי $\min\{c^t x \mid x \in P\}$ תכנית לינארית ביחס לפוליהדרון $P$. אם $P$ מכיל לפחות קודקוד אחד, והמינימום הנ"ל מוגדר היטב (גדול מ-$(-\infty)$), אזי המינימום מתקבל בקודקוד של $P$.

כלומר:

$$\left\{\begin{array}{l} -\infty < \min\{c^t x : x \in P\} \\ \& \\ P \text{ מכיל קודקוד} \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} \text{קיים קודקוד } x^* \in P \text{ עבורו} \\ c^t x^* = \min\{c^t x \mid x \in P\} \end{array}$$

**הוכחה:** יהי $\gamma \triangleq \min\{c^t x \mid x \in P\}$.

נגדיר $Q \triangleq \{x \mid x \in P \ \&\ c^t x = \gamma\}$.

$P$ מכיל קודקוד $\Leftarrow$ $P$ לא מכיל ישר.

$Q \subseteq P$ $\Leftarrow$ $Q$ לא מכיל ישר $\Leftarrow$ $Q$ מכיל קודקוד.

יהי $x^*$ קודקוד של $Q$. נוכיח ש-$x^*$ גם קודקוד של $P$.

אם $x^*$ אינו קודקוד של $P$, אז הוא לא נק' קיצון.

משמע $x^*$ בפנים הקטע $[y,z]$ שקצותיו ב-$P$.

$$c^t y,\ c^t z \geq \gamma \quad \& \quad c^t x^* = \gamma$$

$$\Leftarrow \quad c^t y = c^t z = \gamma$$

$\Leftarrow$ $y,z \in Q$ $\Leftarrow$ $x^*$ לא נק' קיצון ב-$Q$. ☒

שאלה: האם יתכן $\gamma = \inf\{c^t x \mid x\in P\} > -\infty$ אבל $\forall x\in P: c^t x \gneq \gamma$ ?

דוגמה: $\min\{\frac{1}{x} \mid x\geq 0\}$ אינו קיים!

ולכן התשובה אינה לגמרי ברורה מאליה.

הסבר: כמו בהוכחת המשפט נבנה סדרה סופית $\{x^k\}$ המקיימת:
① $x^k\in P$ ② $r(x^{k+1}) > r(x^k)$ ③ $c^t(x^{k+1}) \leq c^T x^k$

איך? נבחר כיוון $d$ המקיים לכל אילוץ: $a_i^T d = 0$ או $a_i^T x^k \gneq b_i$

אם אין כזה כיוון, משמע $\forall d\neq 0\ \exists i: [a_i^T x^k = b_i \Rightarrow a_i^T d\neq 0]$

ולכן אין וקטור $d$ שניצב לאילוצים ההדוקים.

ולכן $r(x^k)=n$.

מסקנה: לכל $x$ שאינו BFS קיים $x^*$ שהוא BFS ועבורו $c^t x^* \leq c^t x$.

אבל יש רק מספר סופי של פתרונות BFS. לכן

$$\gamma \triangleq \inf\{c^t x : x\in P\} > -\infty \Rightarrow \exists x^*: c^t x^* = \gamma$$

## הטלות: אלימינציה בשיטת Fourier-Motzkin

הפונקציה $\Pi_k: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$

המוגדרת ע"י $\Pi_k(x_1,\dots,x_n) \triangleq (x_1,\dots,x_k)$

נקראת הטלה.

$$\Pi_k(S) \triangleq \{\Pi_k(x) \mid x\in S\}$$

שאלה: נתון פוליהדרון $P=\{x \mid Ax\geq b\}$.
האם $P\neq\emptyset$ ?

רעיון לפתרון: נמצא "ייצוג" של $\Pi_{n-1}(P)$.
ונענה על: האם $\Pi_{n-1}(P)\neq\emptyset$ ?

כמובן $P\neq\emptyset \Leftrightarrow \Pi_{n-1}(P)\neq\emptyset$. ונמשיך ברקורסיה...

יתרה מזאת
$$\Pi_1(\Pi_2(\Pi_3(\cdots(\Pi_{n-1}(P)\cdots) = \Pi_1(P)$$

לכן $P\neq\emptyset \Leftrightarrow \Pi_1(P)\neq\emptyset$.

ועכשיו "קל" לבדוק האם $\Pi_1(P)\neq\emptyset$ בהינתן ייצוג $\Pi_1(P) = \{x_1 \mid \tilde{A}x_1\geq\tilde{b}\}$.

איך מוצאים ייצוג $\Pi_{n-1}(P) = \{x' \mid A'x'\geq b'\}$ ?

## אלגוריתם האלימינציה

① האילוץ $a_i x\geq b_i$ ניתן לכתיבה בתור $a_{in}x_n \geq b_i - \bar{a}_i\cdot\bar{x}$

כאשר $\begin{cases}\bar{x}^t \triangleq (x_1,\dots,x_{n-1})\\ \bar{a}_i = (a_{i1},\dots,a_{i,n-1})\end{cases}$

← אם $a_{in}>0$ נכתוב (*) $\boxed{x_n \geq \frac{1}{a_{in}}\cdot b_i - \frac{\bar{a}_i}{a_{in}}\cdot\bar{x}} \triangleq d_i + f_i\bar{x}$

$d_i \triangleq \frac{b_i}{a_{in}}\in\mathbb{R}$, $f_i \triangleq -\frac{\bar{a}_i}{a_{in}}\in\mathbb{R}^{n-1}$

← אם $a_{in}<0$ נכתוב (**) $\boxed{d_i + f_i\bar{x} \geq x_n}$

← אם $a_{in}=0$ נכתוב (***) $\boxed{\bar{a}_i\bar{x}\geq b_i}$

הגדר פוליהדרון $Q\subseteq\mathbb{R}^{n-1}$ ע"י קב' האי-שוויונים

לכל $i$ עבורו $a_{in}=0$ : $\bar{a}_i\bar{x}\ge b_i$

$$\forall i: a_{in}>0\ \forall j: a_{jn}<0:\quad d_j+f_j\bar{x}\ge d_i+f_i\bar{x}$$

$$\iff (f_j-f_i)\bar{x}\ge(d_i-d_j)$$

**טענה:** $Q=\pi_{n-1}(P)$.

**הערות:** אם $P$ מוגדר ע"י $m$ אי-שוויונים, $Q$ מוגדר ע"י לכל היותר $(\frac{m}{2})^2$ אי-שוויונים. ולכן זהו אינו אלג' פולינומי.

**מסקנה:** אם $P$ פוליהדרון, אזי $\pi_k(P)$ גם כן פוליהדרון.

**תוצאה:** אם $P\subseteq\mathbb{R}^{n+k}$ פוליהדרון, אזי

$$P'\triangleq\{x\in\mathbb{R}^n \mid \exists y\in\mathbb{R}^k : (x,y)\in P\}$$

הוא גם כן פוליהדרון.

**תוצאה:** אם $P\subseteq\mathbb{R}^n$ פוליהדרון, וכן $T:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^k$ טרנספורמציה לינארית, אז $T(P)$ גם כן פוליהדרון.

**הוכחה:** $Q=\{(x,y)\mid x\in P,\ Tx=y\}$

הוא פוליהדרון, ו-$T(P)$ הוא הטלה של $Q$.

**תוצאה:** הקמור של קבוצה סופית $X\subseteq\mathbb{R}^n$ הוא פוליהדרון.

**הוכחה:** $\text{conv-hull}(x_1..x_k)=\{\sum_{i=1}^{k}\lambda_i x_i \mid \vec{\lambda}\ge 0,\ 1^t\vec{\lambda}=1\}$

אבל $P=\{(\lambda_1,\dots,\lambda_k)\mid \lambda_1..\lambda_k\ge 0,\ \Sigma\lambda_i=1\}$

הוא פוליהדרון.

$T(\lambda_1\dots\lambda_k)\triangleq\sum_{i=1}^{k}\lambda_i x_i$ היא טרנס' לינארית.

ולכן $T(P)$ הוא פוליהדרון. אבל

$T(P)=\text{conv-hull}(x_1,\dots,x_k)$. $\boxtimes$