29-5-2011

אלגוריתמים ברשתות

- למה של Farkas + וריאציות
- משפט דואליות בצורתו החזקה

נספח בנוגע תוכניות לינאריות

(P) $\max \vec{0}^T x$ s.t. $Ax \le b$

(D) $\min y^T b$ s.t. $y^T A = 0$, $y \ge 0$

בהמשך נראה ששתי התוכניות קשורות זו לזו ע"י דואליות

קל לראות שקיים פתרון פיזיבילי עבור D (פשוט $y=\vec{0}$).

נניח שקיים פתרון פיזיבילי עבור P (דהיינו $\{x : Ax \le b\} \neq \emptyset$).

נסמן ב x^*, y^* פתרונות אופטימליים עבור D ו-P, בהתאמה.

דואליות חלשה: $\vec{0} \cdot x^* \le y^{*T} \cdot b$

הוכחה: $\vec{0}^T x^* = (y^{*T} A) x^* = y^{*T} (A x^*) \le y^{*T} b$

(P) $\max \vec{0}^T x$ s.t. $Ax \le b$

(D) $\min y^T b$ s.t. $y^T A = 0$, $y \ge 0$

דואליות חזקה: $\vec{0}^T x^* = y^{*T} b$

נוכיח דואליות חזקה בעזרת הלמה של פרקש...

למה של Farkas: 2 התנאים הבאים שקולים:

① הפוליהדרון $P = \{Ax \le b\}$ אינו ריק.

② לא קיים וקטור $y \ge 0$ עבורו: $y^t b < 0$ & $y^t A = 0$.

(שקול: בדיוק אחד התנאים מתקיימים: ① או NOT(②)).

הוכחת ① ⇐ ②: יהי x פתרון פיזיבילי של P ו-y פתרון פיזיבילי של D. לפי דואליות חלשה:

$$0 = \vec{0}^T x \le y^T b$$

לפני שנוכיח ② ⇐ ① נבחין ב 2 דוגמאות:

דוגמה 1: A מטריצה 1×1:

נשים לב כי: $\exists x:\ a\cdot x\le b \iff \begin{cases} a=0 \ \&\ b\ge 0 \\ \text{OR} \\ a\ne 0 \end{cases}$

$$\iff (a=0 \Rightarrow b\ge 0)$$

מאידך $\exists y\ge 0:\ ya=0 \ \&\ yb<0$

$$\iff (a=0 \ \&\ b<0)$$

$$\iff \neg(a=0 \Rightarrow b\ge 0)$$

כי: $(\alpha\wedge\beta)=\neg\neg(\alpha\wedge\beta)=\neg(\bar\alpha\vee\bar\beta)=\neg(\alpha\to\bar\beta)$

ולכן ① $\iff$ ②

דוגמא 2: A מטריצה $m\times 1$.

נניח שאין פתרון למערכת $\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_m\end{pmatrix}x\le b$

2 אפשרויות:

(א) קיים אינדקס i עבורו $a_i=0$ בעוד $b_i<0$.

נשים לב שאם $a_i=0$ אבל $b_i\ge 0$, אז האילוץ $a_ix\le b_i$ מיותר כי הוא מסתפק לכל x. ולכן אם (א) לא מתקיים, משמע בה"כ $\forall i: a_i\ne 0$.

במקרה א' נוכל למצוא y כמבוקש:

נגדיר $y\triangleq e^i$ ואז $\left.\begin{matrix} y^tb=b_i<0 \\ y^tA=a_i=0 \end{matrix}\right\}$

דוגמא 2 (המשך): A מטריצה $m\times 1$.

נניח שאין פתרון למערכת $\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_m\end{pmatrix}x\le b$

אם לא מתקיים (א) משמע:

לכל i, $a_i\ne 0$ ולכן יש זוג אילוצים סותרים, כלומר:

(ב) קיים זוג אינדקסים $i\ne j$ עבורם

$$\frac{b_j}{a_j}\le\frac{b_i}{a_i} \Leftarrow \begin{cases} a_i>0 \text{ ולכן } x\le b_i/a_i \\ a_j<0 \text{ ולכן } x\ge b_j/a_j \end{cases}$$

אבל $\frac{b_j}{a_j}>\frac{b_i}{a_i}$ $\left(\iff a_ib_j<a_jb_i\right)$

נבנה $y\ge 0$ ע"י הגדרת $y\triangleq -a_je^i+a_ie^j$

נשים לב כי:

(i) $a_i>0 \ \&\ a_j<0 \Rightarrow y\ge 0$

(ii) $y^tA=a_ja_i-a_ia_j=0$

אבל $y^tb=-a_jb_i+a_ib_j<0$

כעת נניח $① \Leftarrow ②$ [באופן שקול $\neg② \Leftarrow \neg①$]

ההוכחה באינדוקציה על מס' עמודות A.

בסיס האינדוקציה עבור $n=1$ הוכח בדוגמא 2.

מעבר לשלב האינדוקציה...

הערה 3: כל שורה של $(0|\tilde{A})$ היא שורה a_i של A (שבה $a_{i1}=0$) או סכום a_r+a_s של שורות A (שמקיימים $\underset{1}{a_{r1}}+\underset{-1}{a_{s1}}=0$).

$\longrightarrow$ זוהי תכונה של הרדוקציה האופיינית ב Fou-Motz. + עמודה ראשונה $\pm1,0$.

הערה 4: כל שורה של $(0,\tilde{A})$ היא שורה של A או סכום של 2 שורות של A.

הגדרה: חרוט שנפרש ע"י קבוצת וקטורים.

תהי: $V=\{v_1,\dots,v_k\}\subseteq\mathbb{R}^n$

$$\text{cone}(V)\triangleq\left\{\sum_{i=1}^{k}\lambda_i v_i \;\middle|\; \bar{\lambda}=(\lambda_1,\dots,\lambda_k)\geq 0\right\}$$

נפעיל את שיטת האלימינציה של Fourier-Motzkin על המערכת $Ax\leq b$. (ראה בה"כ בהמשך...)

תהי: $\tilde{A}\bar{x}\leq\tilde{b}$ המערכת עם $n-1$ משתנים.

$\phi=\{x|Ax\leq b\}\Leftarrow\phi=\{\bar{x}|\tilde{A}\bar{x}\leq\tilde{b}\}$, ולפי הנחת האינדוקציה: קיים $\tilde{y}\geq0$ עבורו $\tilde{y}^t\tilde{b}<0$ & $\tilde{y}^t\tilde{A}=0$.

כעת נבנה את y בעזרת $\tilde{y}$:

בה"כ: $\tilde{y}^t\tilde{b}=-1$ וגם העמודה הראשונה של A מכילה רק $\{0,\pm1\}$.

הערה 1: $\tilde{y}^t\cdot(\tilde{A}|\tilde{b})=0^{n-1}\circ-1$

הערה ב: $\tilde{y}^t\cdot(0|\tilde{A}|\tilde{b})=0^n\circ-1$

תזכורת: $\tilde{y}^t\cdot(0|\tilde{A}|\tilde{b})=0^n\circ-1$

כיון ש $0^n\circ-1$ מוכל בחרוט שנפרש ע"י שורות $(0|\tilde{A}|\tilde{b})$,

מהערה 4 $\Leftarrow$ $0^n\circ-1$ גם בחרוט שנפרש ע"י שורות $(A|b)$.

יהי $y\geq0$ וקטור המקדמים עבורו $y^t(A|b)=0^n\circ-1$.

y הוא הוקטור המבוקש. ☒

גירסה ב ללמה של Farkas

① קיים $x\geq0$ עבורו $Ax=b$

$\Longleftrightarrow$

② לא קיים וקטור y עבורו $y^tb<0$ & $y^tA\geq0$.

$$(P)\quad \begin{array}{ll}\text{MAX} & 0^Tx\\ \text{s.t.} & Ax=b\\ & x\geq0\end{array}\qquad\qquad (D)\quad \begin{array}{ll}\text{MIN} & y^Tb\\ \text{s.t.} & y^TA\geq0\\ & y\text{ free}\end{array}$$

1 ⇐ ב: שוב, נובע מדואליות חלשה...

במקום להוכיח ב⇐1, נבצע רדוקציה לגרסה הראשונה!

גירסה ב ללמה של Farkas

קיים $x\ge0$ עבורו $Ax=b$ אמ"מ לא קיים וקטור y עבורו $y^tA\ge 0$ & $y^tb<0$.

הוכחה: $P=\{x\ge0 : Ax=b\} = \{x \mid Ax\le b,\ -Ax\le -b,\ x\ge 0\}$

ולכן נגדיר: $A' = \begin{pmatrix} A \\ -A \\ -I \end{pmatrix}$ $b' = \begin{pmatrix} b \\ -b \\ 0 \end{pmatrix}$

ואז $P = \{x \mid A'x \le b'\}$

לפי הלמה של פרקש: $P\ne\emptyset \Longleftrightarrow \nexists y\ge 0 : y^tA'=0\ \&\ y^tb'<0$

$\Longleftrightarrow \nexists \alpha,\beta,\gamma\ge0\quad (\alpha^t-\beta^t)A-\gamma^t I=0\ \&\ (\alpha^t-\beta^t)b<0$

הגדר $y \triangleq \alpha-\beta$

$\Longleftrightarrow \nexists y : y^tA\ge 0\ \&\ y^tb<0$ ☒

תוצאה: יהי $P=\{x \mid Ax\le b\}\ne\emptyset$. לכל $c\in\mathbb{R}^n$ ולכל $\delta\in\mathbb{R}$:

$\forall x\in P : c^tx\le\delta$ (1)

אמ"מ

$\exists y\ge0 : y^tA=c^t\ \&\ y^tb\le\delta$ (2)

הוכחה: (1) ⇐ (2)

אם $y\ge0$, $y^tA=c^t$, וכן $y^tb\le\delta$ אז:

$$c^tx = y^tAx \underset{y\ge0}{\le} y^tb \le \delta$$

(1) ⇐ (2): אם אין y כנ"ל משמע שהמערכת

$$(y^t\ \lambda)\begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1\end{pmatrix} = (c^t\ \delta)$$

אין פתרון $(y^t\ \lambda)\ge 0$.

לפי הלמה של פרקש, קיים וקטור $\begin{pmatrix} z \\ \mu\end{pmatrix}$

שמקיים $\begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ \mu\end{pmatrix} \ge 0$

וכן $(c^t\ \delta)\begin{pmatrix} z \\ \mu\end{pmatrix} < 0$

למה $\mu\ge0$?

נחלק ל2 מקרים: $\mu=0$ וכן $\mu>0$.

(I) אם $\mu=0$ אז $Az\ge0$, $c^tz<0$

יהי $x^0\in P$: $A(x^0-\tau z)\le Ax^0\le b$ $(\tau\ge0)$

ולכן $\{x^0-\tau z \mid \tau\in\mathbb{R}_{\ge0}\}\subseteq P$

אבל $c^t(x^0-\tau z) = c^tx^0-\tau c^tz \xrightarrow[\tau\to\infty]{} \infty$

ולכן קיים $x\in P$ עבורו $c^tx>\delta$.

(II) אם $\mu>0$: $\left.\begin{aligned} Az+b\mu\ge0 \\ c^tz+\delta\mu<0\end{aligned}\right\}$

נגדיר $x=-\frac{1}{\mu}\cdot z$ ונקבל

$Ax=-\frac{1}{\mu}Az\le b$ & $c^tx=-\frac{1}{\mu}c^tz>\delta$

משמע $x\in P$ ומקיים $c^tx>\delta$, בסתירה.

משפט דואליות (צורה חלשה)

$$P \triangleq \{ x \mid Ax \le b \}$$

$$Q \triangleq \{ y \mid y \ge 0 \;\&\; y^tA = c^t \}$$

לכל $\tilde{x} \in P$ ולכל $\tilde{y} \in Q$ מתקיים:

$$c^t \tilde{x} \le \tilde{y}^t b$$

הוכחה:

$$c^t \tilde{x} = (\tilde{y}^t A)\tilde{x} = \tilde{y}^t (A\tilde{x}) \le \tilde{y}^t \cdot b \quad (\text{כי } \tilde{y} \ge 0)$$

הערה: Q פוליהדרון פרימאלי, P פוליהדרון דואלי – קצת "מבלבל"

משפט דואליות (צורה חזקה) [Von Neumann - 47]

$$\max\{ c^t x \mid Ax \le b \} = \min\{ y^t b \mid y \ge 0, y^tA = c^t \}$$

אם ב הפוליהדרונים אינם ריקים.

הוכחה:

$$\delta \triangleq \sup\{ c^t x \mid Ax \le b \}$$

$$\gamma \triangleq \inf\{ y^t b \mid y \ge 0, y^tA = c^t \}$$

דואליות חלשה $\Leftarrow$ $\delta \le \gamma$.

מהגדרת δ: $Ax \le b \Leftarrow c^t x \le \delta$.

לפי התוצאה הקודמת, קיים $y \ge 0$ עבורו

$$y^tA = c^t \;\&\; y^tb \le \delta$$

ולכן $\gamma \le \delta$, כנדרש.

כיון ש $\gamma = \delta$ הם סופיים $(\ne \pm\infty)$,

כבר הוכחנו:

$$\exists x : \; Ax \le b \;\&\; c^t x = \delta$$

$$\exists y : \; y \ge 0 \;\&\; y^tA = c^t \;\&\; y^t b = \gamma$$

אפשר גם להוכיח את זה ע"י שימוש בלמה של פרקש...

גרסא נוספת: אם ב הפוליהדרונים אינם ריקים, אזי

$$\max\{ c^t x \mid x \ge 0, Ax = b \} = \min\{ y^t b \mid y^tA \ge c^t \}$$

נבצע רדוקציה מהצורה הסטנדרטית לצורה $Ax \le b$:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A \\ -A \\ -I \end{pmatrix} \qquad \tilde{b} = \begin{pmatrix} b \\ -b \\ 0 \end{pmatrix}$$

ואז

$$\{ x : Ax = b, x \ge 0 \} = \{ x \mid \tilde{A}x \le \tilde{b} \}$$

ולכן גם ה-max של כל אחד שוה.

מסקנה:

$$\delta = \max\{ c^t x \mid x \ge 0, Ax = b \}$$

$$= \max\{ c^t x \mid \tilde{A}x \le \tilde{b} \}$$

$$= \min\{ z^t \tilde{b} \mid z \geq 0,\ z^t \tilde{A} = c^t \}$$

נכתוב: $z = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ ואז

$$z^t \tilde{A} = u^t A - v^t A - w = c^t$$

$$z^t \tilde{b} = u^t b - v^t b = \delta$$

נגדיר $y \triangleq u - v$

$$z^t \tilde{A} = y^t A - w \implies y^t A \geq c^t$$

$$z^t \tilde{b} = y^t b = \delta$$

ולכן

$$\delta = \min\{ y^t b \mid y^t A \geq c^t \}$$