אלגוריתמים ברשתות - 27/2/2011

Note Title 25/10/2006

זרימה מקסימום ברשתות

רשת זרימה $N=\langle G,s,t,c\rangle$

- גרף מכוון $G=(V,E)$
- מקור $s\in V$ ובור $t\in V$
- קיבולים $c:E\to\mathbb{R}^{\ge 0}$

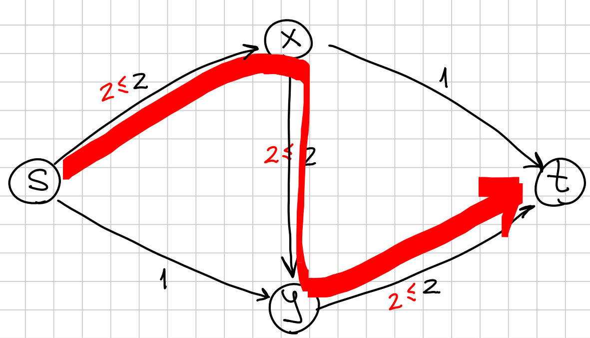
זרימה פורמלית: $f:E\to\mathbb{R}^{\ge 0}$ המקיימת

[אילוץ קיבול] $\forall e\in E: \quad 0\le f(e)\le c(e)$

[אילוץ שימור זרימה] $\forall v\in V\setminus\{s,t\}: \quad \sum_{e\in IN(v)} f(e)=\sum_{e\in out(v)} f(e)$

כמות הזרימה $|f|$: $|f|\triangleq \sum_{e\in out(s)} f(e)-\sum_{e\in IN(s)} f(e)$

דוגמא



הגדרה בעזרת זרימת מסלולים:

$P\triangleq$ קב' כל המסלולים המכוונים (והפשוטים) מהמקור s לבור t.

זרימה: $f:P\to\mathbb{R}^{\ge 0}$ המקיימת

[אילוץ קיבול] $\forall e\in E: \quad \sum_{\{p\in P\mid e\in p\}} f(p)\le c(e)$

$|f|\triangleq\sum_{p\in P} f(p)$

הגדרה שלישית (Sleator)

1) נרחיב את פונק' הקיבולים לכל זוגות הצמתים

$c: V\times V \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ כאשר $c(v,w)=0$ אם $(v,w)\notin E$.

2) זרימה היא פונקציה $f: V\times V \to \mathbb{R}$ המקיימת

א) אילוצי קיבול: $\forall (v,w)\in V\times V: f(v,w)\le c(v,w)$

ב) סימטריות: $\forall (v,w)\in V\times V: f(v,w) = -f(w,v)$

ג) שימור הזרימה: $\forall v\in V\setminus\{s,t\}: \sum_{u\in V} f(u,v)=0$

כמות הזרימה $|f| \triangleq \sum_{v\in V} f(s,v)$.

מוזר?

זרימה: $f: P\to \mathbb{R}^{\geq 0}$ המקיימת

$\forall e\in E: \sum_{\{p\in P | e\in p\}} f(p) \le c(e)$ [אילוץ קיבול]

הערות: 1) אין צורך באילוצי שימור זרימה.

2) מספר המשתנים עלול להיות אקספ'.

3) נדרשת הוכחה לשקילות...

4) אם $\forall p: f(p)\in\mathbb{N}$, אז f אריזה בשלמים

ההגדרות שקולות במובן שיש רדוקציות בינהן:

נסמן f-זרימה רגילה, g-זרימה Sleator, h אריזת מסלולים

סטנדרטי ← Sleator:

$g(u,v) \triangleq f(u,v) - f(v,u)$: לכל $(u,v)\in E\cup E^{Rev}$

$g(u,v)\triangleq 0$: לכל $(u,v)\notin E\cup E^{Rev}$

Sleator ← סטנדרטי: לכל $h(u,v)\triangleq g(u,v)$

אריזת מסלולים ← סטנדרטי: $f(e) \triangleq \sum_{\{p: e\in p\}} h(p)$

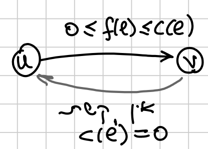
סטנדרטי ← אריזת מסלולים: מפורט... בהמשך

א) אילוצי קיבול: $\forall (v,w)\in V\times V: f(v,w)\le c(v,w)$

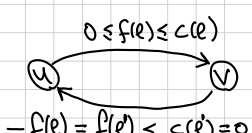
ב) אנטי-סימטריות: $\forall (v,w)\in V\times V: f(v,w) = -f(w,v)$

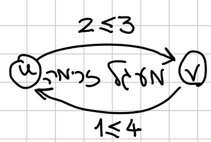
ג) שימור זרימה: $\forall v\in V\setminus\{s,t\}: \sum_{u\in V} f(u,v)=0$

סטנדרטי



Sleator





לא יתכנו מעגלי זרימה באורך 2

מושגים

קשת רוויה: אם $f(e) = c(e)$ (הגדרה סטנדרטית או Sleator)

או $f(e) \triangleq \sum_{\{p : e\in p\}} f(p) = c(e)$ (לפי אריזת מסלולים)

כמות זרימה:

לפי ההגדרה הסטנדרטית: $|f| = \sum_{e\in out(s)} f(e) - \sum_{e\in in(s)} f(e)$

לפי אריזת מסלולים: $|f| = \sum_{p\in P} f(p)$

לפי Sleator: $|f| = \sum_{v\in V} f(s,v)$

מושגים - המשך

חתך: אם $S \subsetneq V$ מקיים $s\in S$ וכן $t\notin S$

אז החתך המושרה ע"י S הוא

$$\delta(S) \triangleq \{(v,w)\in V^2 \mid v\in S \ \&\ w\notin S\}$$

קיבול חתך: $c(S) \triangleq \sum_{(v,w)\in\delta(S)} c(v,w)$

כמות זרימה בקב' קשתות: אם $F\subseteq E$ אז $f(F)\triangleq\sum_{e\in F} f(e)$.

מושגים (המשך)

זרימה מקסימום:

f זרימה מקסימום אם לכל זרימה f' מתקיים: $|f| \ge |f'|$.

זרימה מקסימלית:

f זרימה מקסימלית אם בכל מסלול מכוון מהמקור s לבור t יש קשת רוויה.

שאלה מס' 1: (שקילות של הגדרות)

הראו כיצד ניתן לתרגם כל זרימה סטנדרטית לזרימה לפי Sleator, ולהיפך.

זרימה נטו בחתך:

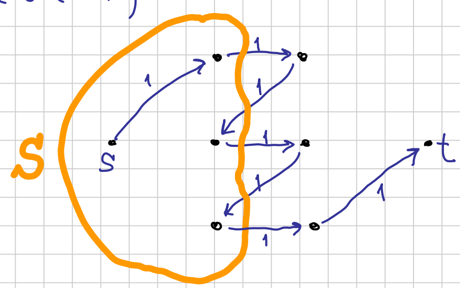
בהגדרה הסטנדרטית:

$$f(\delta(S)) - f(\delta(V\setminus S))$$

בהגדרה של Sleator:

$$f(\delta(S))$$

דוגמה:



תכונות קלות (נשתמש בהגדרה של Sleator)

① האם: f זרימה מקסימלית $\Leftarrow$ f זרימה מקסימום?

② $|f| = f(\delta(\{s\}))$

③ לכל 2 חתכים S_1, S_2: $f(\delta(S_1)) = f(\delta(S_2))$

ובפרט: $f(\delta(S_1)) = |f|$

④ לכל חתך S: $f(\delta(S)) \leq c(S)$

מתי יש שוויון?

⑤ במילים אחרות: מה אומר ④?

עוד תכונות קלות

⑥ מעגל זרימה: מסלול מעגלי ב-G שבכל קשת לאורכו יש זרימה חיובית.

⑦ ניתן להיפטר ממעגלי זרימה: אם ב-N יש זרימה $f: E \to \mathbb{R}^{\geq 0}$, אז קיימת זרימה $g: E \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ המקיימת:

א $|g| = |f|$

וגם ב g אינה מכילה מעגל זרימה.

⑧ אם $f, g, f+g$ זרימות ב N אז

$$|f+g| = |f| + |g|$$

ועוד תכונות קלות

⑨ אם f זרימה חוקית וכן $|f| > 0$ אז קיים מסלול p מהמקור s לבור t המקיים:

$$\forall e \in p: \quad f(e) > 0$$

פירוק זרימה למסלולי זרימה

תהי N רשת זרימה.

המקרה השלם:

קיימת זרימה סטנדרטית $f: E \to \mathbb{N}$ המקיימת $|f| = k$
אםם ניתן לארגן k מסלולי s-t ברשת N ז"ז
אריזה $\{0,1\}$.

המקרה השבור:

קיימת זרימה סטנדרטית $f: E \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ המקיימת $|f| = x$
אםם קיימת אריזה שבורה בגודל x של לכל
היותר $|\{e : f(e) > 0\}|$ מסלולי s-t ברשת N.

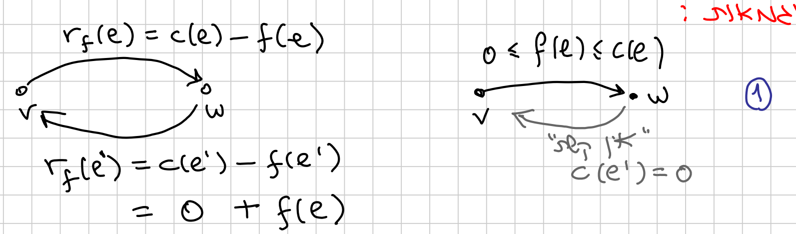
הרשת השיורית (לפי הגדרת Sleator)

תהי f זרימה ברשת N. הרשת השיורית N_f היא
רשת מעל אותם הצמתים ועם אותו מקור ובור.

פונקצית הקיבולים ברשת השיורית:

$$r_f(v,w) \triangleq c(v,w) - f(v,w)$$

דוגמאות:



טענה: אם f זרימה ב-N וגם g זרימה ב-N_f,
אז $f+g$ זרימה ב-N ומתקיים

$$|f+g| = |f| + |g|$$

מסקנה: אם קיימת זרימה g ב-N_f עבורה $|g| > 0$,
אז f אינה זרימה מקסימום.

טענה: זרימת האפס היא זרימה מקסימום ב-N
אםם לא קיים מסלול p מהמקור s לבור t
שמקיים $\forall e \in p:\ c(e) > 0$.

טענה: זרימת האפס היא זרימה מקסימום ב-N
אםם לא קיים מסלול p מהמקור s לבור t
שמקיים $\forall e \in p:\ c(e) > 0$.

הוכחה: $(\Leftarrow)$ קל.
$(\Rightarrow)$ נבנה חתך S ונראה $c(S) = 0$.
מובן $\forall f:\ |f| \leq c(S)$.
ולכן זרימת אפס היא מקסימום.

כעת מוכנים להוכיח 2 תוצאות מרכזיות:

$\left\{ \begin{array}{l} \text{min-cut max-flow Theorem} \\ \text{Ford \& Fulkerson algorithm} \end{array} \right.$

אלגוריתם למציאת זרימה מקסימום (Ford & Fulkerson)

$f = 0$

כל עוד קיים מסלול הרחבה p:

- יהי f_p זרימה מקסימלית ב N_f לאורך p
- עדכן: $f \leftarrow f + f_p$

החזר את f.

מסלול הרחבה: מסלול ב N_f מהמקור לבור שלכל קשתותיו יש קיבול חיובי.

משפט: חתך מינ' = זרימה מקס'

אם ב-N קיימת זרימה מקסימום אזי:

$$\max \{ |f| : f \text{ זרימה ב } N \} = \text{MIN} \{ c(S) : S \text{ חתך} \}$$

הוכחה: כבר הוכחנו $\forall f, S: \ |f| \le c(S)$.

לכן מעוניינים למצוא שיוויון. יהי f זרימה מקסימום.

משמע ב-N_f, זרימת האפס היא זרימה מקסימום.

יהי S חתך ב N_f המקיים $r_f(S) = 0$.

נותר להראות:

$$\forall (v,w) \in \delta(S): \ f(v,w) = c(v,w) \qquad \square$$

סיבוכיות של Ford & Fulkerson

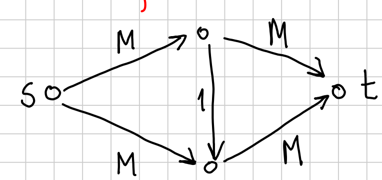
נניח שכל הקיבולים שלמים.

בכל מסלול הרחבה, צוואר הבקבוק הוא לפחות 1.

לכן מספר האיטרציות $\le |f|$

ולכן הסיבוכיות היא $O((m+n) \cdot |f|)$.

למה אנחנו מרוצים מזמן הריצה?



נכונות של Ford & Fulkerson

נניח קיבולים שלמים.

כיון ש $c(\{s\}) < \infty$, קיימת זרימה מקסימום, שגודלה M.

בכל איטרציה מגדיל את הזרימה בלפחות 1.

לפיכך האלג' עוצר כעבור M איטרציות לכל היותר.

כשהאלגוריתם עוצר: אין מסלול הרחבה $\Leftarrow$ הזרימה המחושבת היא מקסימום.