מבוא לאלגוריתם של Goldberg & Tarjan

מושגים:

עודף זרימה שנכנס לצומת v (excess flow).

$$e(v) \triangleq \sum_{u \in V} f(u,v)$$

(בזרימה חוקית, $e(v)=0$, לכל $v \in V \setminus \{s,t\}$.)

קדם זרימה (preflow): $f: V \times V \to \mathbb{R}$

מקיימת: אילוץ קיבול, אנטי-סימטריות, ואילוץ זרימה אי-שלילי:

$\forall v \in V \setminus \{s\}: \quad e(v) \geq 0$

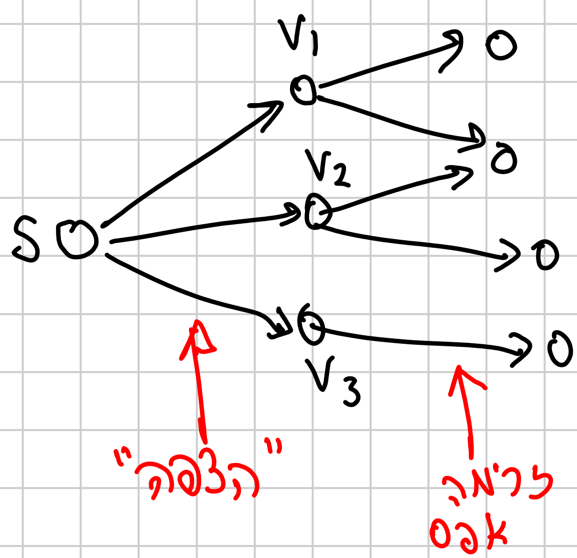
קשת שיורית זוג צמתים (v,w) המקיים $r_f(v,w) > 0$.

$$r_f(v,w) \triangleq c(v,w) - f(v,w)$$

קדם זרימה $\forall v \neq s: \quad e(v) \triangleq \sum_{u \in V} f(u,v) \geq 0$

דוגמא:

$$f(u,v) = \begin{cases} c(u,v) & \text{if } u=s \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



נשים לב: קדם-הזרימה מרווה את כל קשתות $\delta(\{s\})$.

עקרונית

שאלה: האלגוריתם מחשב קודם זרימה כלשהי
תמיד מהווה חתך כלשהו בגרף.

האלג' מנסה "לתקן" את קודם הזרימה כדי שתהפוך לזרימה חוקית (תקיים גם את אילוצי שימור הזרימה).

אם הזרימה חוקית, אז היא מקסימום (כי יש חתך רווי).

2 סוגי תיקונים:

(1) המשך הזרמה לכיוון הבור (אופטימי)

(2) החזר זרימה למקור (פסימי).

תווית תקינה

נתונה רשת N, f זרם פריאה, ורשת שיורית N_f.

פונקציה $d: V \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ נקראת פונקציית תווית אם:

1. $d(s) = n$ (s הוא המקור)
2. $d(t) = 0$ (t הוא הבור)
3. $\forall v,w \in V: \quad r_f(v,w) > 0 \Rightarrow d(v) \leq d(w) + 1$

תנאי 3 מזכיר "מסלולים קצרים" מ-s ל-t.

הוכחה:

אם f היא קדם-זרימה שמציפה את $\delta(\{s\})$, נגדיר $d(v) = \begin{cases} n & \text{if } v=s \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$.

נשים לב שלכל w: $r_f(s,w) = 0$, ולכן d היא פונקציית תווית חוקית.

תוויות: $\left[d(v) \leq d(w)+1,\ d(t)=0,\ d(s)=n \right]$

סימון: $d_{N_f}(v,w) \triangleq$ המרחק בין v ל-w בגרף המושרה ע"י הקשתות השיוריות.

<u>טענה 1:</u>

$$(1)\quad \forall v: \quad d(v) \leq d_{N_f}(v,t)$$

$$(2)\quad \forall v \quad d_{N_f}(s,v) \geq n - d(v)$$

$$d_{N_f}(v,s) \geq d(v) - n$$

$$(3)\quad \forall v \quad d(v) \geq n \Rightarrow d_{N_f}(v,t) = \infty$$

<u>טענה 2:</u> אם f קדם זרימה ו-d פונקציית תוויות חוקית, אזי קיים מסלול שיורי בין s ל-f.

תזכורת - הוכחת טענה 1 :

① נסתכל במסלול קצר ביותר מ-v ל-t ב-N_f

$$\underset{v=v_0}{\circ} \longrightarrow \underset{v_1}{\circ} \longrightarrow \cdots \quad \underset{v_{k-1}}{\circ} \longrightarrow \underset{v_k=t}{\circ}$$

כמובן, $d(t)=0$, ולכן

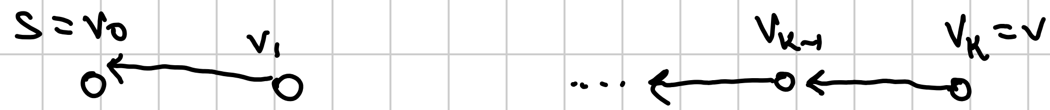
$$d(v_{k-1}) \leq 1$$
$$d(v_{k-2}) \leq 2$$
$$\vdots$$
$$d(v_0) \leq k$$

② נסתכל במסלול קצר ביותר מ-s ל-v:

$$\underset{d(s)=n}{\overset{s=v_0}{\circ}} \longrightarrow \overset{v_1}{\circ} \longrightarrow \overset{v_2}{\circ} \longrightarrow \cdots \overset{v_{k-1}}{\circ} \longrightarrow \overset{v_k=v}{\circ}$$

$$d(v_i) \leq 1 + d(v_{i+1}) \implies n = d(v_0) \leq k + d(v_k)$$

נסתכל במסלול קצר ביותר מ-v ל s:



$$1 + d(v_i) \geq d(v_{i+1})$$

$$\Longrightarrow \quad k + n \geq d(v_k)$$

$$d_{N_f}(v_k, s) = k \geq d(v_k) - n$$