אלגוריתמים ברשתות 24/3/11

Note Title 08/11/2006

* זרימה מקס' עם חסמים תחתונים.

* "זרימה מינימום = חתך מקסימום"

זרימה עם חסמים תחתונים

נשתמש בהגדרה הסטנדרטית של זרימה, ונוסיף אילוצים מהסוג $\forall e:\ f(e) \geq b(e)$

כעת, זרימת האפס אינה בהכרח מקיימת את האילוצים החדשים, ויש קושי במציאת זרימה פיזיבילית.

שאלות:

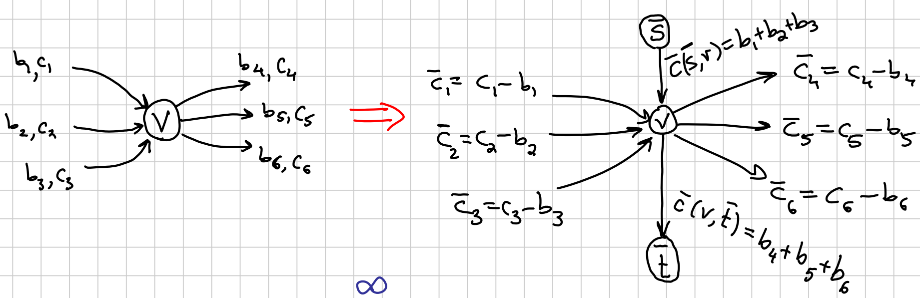
(1) איך מוצאים זרימה פיזיבילית בנוכחות חסמים תחתונים?

(2) איך מחשבים זרימה מקסימום?

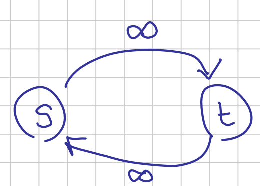
רדוקציה: זרימה פיזיבילית עם חסמים תחתונים $<$ זרימה מקס' רגילה

הוסף מקור $\bar{s}$ ובור $\bar{t}$. חבר כל $v \in V$: $(\bar{s},v)$, $(v,\bar{t})$

הגדר קיבולים $\bar{c}$ ברשת החדשה $\tilde{N}$.



ובנוסף



טענה: קיימת זרימה פיזיבילית ב-N אמ"מ קיימת זרימה מקסימום ב $\bar{N}$ שמרווה את כל הקשתות היוצאות מ-$\bar{s}$.

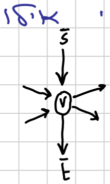
הוכחה: הכיוון הקל ($\Leftarrow$) תהי $\bar{f}$ זרימה מקס' ב $\bar{N}$ שמרווה את קשתות $\delta(\{\bar{s}\})$. לכל $e \in N$ נגדיר $f(e) \triangleq \bar{f}(e) + b(e)$.

כמובן $0 \leq \bar{f}(e) \leq \bar{c}(e) = c(e) - b(e) \Rightarrow b(e) \leq f(e) \leq c(e)$.

ומה לגבי אילוץ שמירת הזרימה?

$$\bar{f}_{in}(v) = f_{in}(v)$$
$$\|$$
$$\bar{f}_{out}(v) = f_{out}(v)$$

הזרימה שנכנסה מ $\bar{s}$ מוכנסת דרך קשתות N וכנ"ל לגבי היוצאת



הכיוון ⇐: אם f פיזיבילית ב N נבנה את הבעיה "ההפוכה"

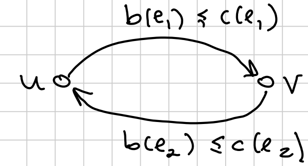
לכל $e\in N$: $\bar f(e) \triangleq f(e) - b(e)$

$$\bar f(\bar s, v) = \sum_{e\in in(v)} b(e) \quad \left(= \bar c(\bar s, v)\right)$$

$$\bar f(v,\bar t) = \sum_{e\in out(v)} b(e)$$

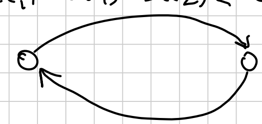
* אילוצי קיבול מתקיימים בכל הקשתות.
* אילוצי שמירת זרימה מתקיימים בכל $v\in V\setminus\{s,t\}$
* "נתקן" את שמירת הזרימה ב-s וב-t באמצעות הקשתות ביניהם (בעלות קיבול ∞).
* קשתות החתך $\delta(\{\bar s\})$ רוויות. (ולכן $\bar f$ זרימה מקס'). □

טענה: בה"כ לכל זוג צמתים (u,v): $\min\{b(u,v),b(v,u)\}=0$.



⇓

$\bar b(e_1)\triangleq b(e_1)-b(e_2) \le \bar c(e_1) \triangleq c(e_1)-b(e_2)$

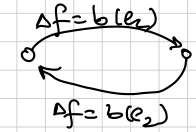


$\bar b(e_2)=0$, $\bar c(e_2)\triangleq c(e_2)-b(e_2)$

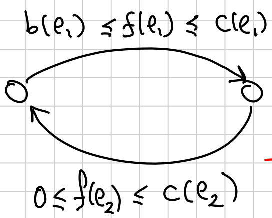
הוכחה: נניח שלא, בה"כ

$b(e_1) \ge b(e_2)$

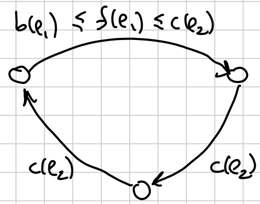
נחסיר $b(e_2)$ משתי הקשתות. נחשב זרימה ברשת החדשה, ואח"כ נוסיף מעגל זרימה



רדוקציה לזרימה אנטי-סימטרית

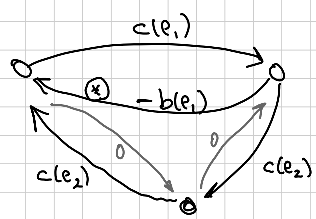


⇒ נפטר מקשתות אנטי-מקבילות



נפטר מחסמים תחתונים (נשתמש בקיבולים שליליים) ונעבור לזרימה אנטי-סימטרית ⇓

$$\Leftrightarrow \left.\begin{aligned} b(e_1) &\le f(e_1) \\ -f(e_1) &\le -b(e_1)\end{aligned}\right\} (*)$$



מסקנה: ניתן לפתור בעיית זרימה מקס' (פיזבילית) עם חסמים תחתונים בבעיית זרימה מקס' (Sleator) עם קיבולים חיוביים/שליליים $c: E\cup E^{rev}\to\mathbb R$.

קלט: $N \triangleq \langle G=(V,E), c, s, t\rangle$

1) G גרף מכוון.

2) $c: E\cup E^{rev}\to\mathbb R$ קיבולים לקשתות ולקשתות ההפוכות

$[\forall e\in E: c(e)>0,\ \forall e\in E^{rev}: c(e)\le 0]$

3) s,t מקור ובור.

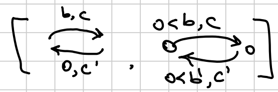
מחפש זרימה מקס' $f: E\cup E^{rev}\to\mathbb R$ שמקיימת:

1) $\forall e: f(e)\le c(e)$ 2) $f(e)=f(e^{rev})$ 3) $\forall v\in V\setminus\{s,t\}: e(v)=0$

טענה: אם f זרימה (sleator) ב-N
אז הקיבולים ב-N_f הם אי-שליליים.

מסקנה: אלג' למציאת זרימה מקס' עם חסמים תחתונים:

1) חשב זרימה **חוקית** (ע"י רדוקציה) f

2) בצע סדרה של רדוקציות [] כדי להעביר

הבעיה כבעית זרימה (sleator) עם קיבולים חיובים/שליליים.

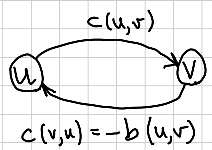
3) בנה רשת **שיורית** N_f, וחשב בה זרימה מקס'.

הערה: אפשר גם להפעיל אלג' על זרימה סטנדרטית...

מציאת זרימה מקסימום עם חסמים תחתונים

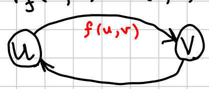
נתבונן לזרימה אנטי-סימטרית:

$$r_f(u,v) \triangleq c(u,v) - f(u,v)$$



$$b(u,v) \le f(u,v) \le c(u,v)$$
$$\Updownarrow$$
$$-f(u,v) \le -b(u,v) \ \& \ f(u,v) \le c(u,v)$$

$r_f(u,v) = c(u,v) - f(u,v) \ge 0$



$$r_f(v,u) = c(v,u) - f(v,u) = f(u,v) - b(u,v) \ge 0$$

לכן הוספת חסמים תחתונים אינה משנה "דבר" למעט קיבולים <u>שליליים</u>.

זרימה מינימום עם חסמים תחתונים

<u>תיאור הבעיה:</u> נתונה רשת זרימה עם חסמים תחתונים. מצא זרימה חוקית הממזערת את כמות הזרימה.

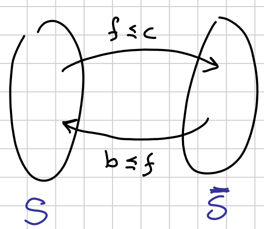
<u>שיטת הפתרון:</u> רדוקציה פשוטה לזרימה מקסימום בכיוון ההפוך.

<u>סימון:</u> נגדיר לכל זרימה f 2 גדלים

$$Flow_{s\to t}(f) = \text{excess-flow}(t)$$

$$Flow_{t\to s}(f) = \text{excess-flow}(s)$$

חתכים בזרימה עם חסמים תחתונים



נגדיר מחדש קיבול של חתך:

$$C(S) \triangleq c(\delta(S)) - b(\delta(\bar{S}))$$

ובכן אם קיימת זרימה מקסימום אז:

$$\max\{|f| \mid f \text{ זרימה עם חסמים תחתונים}\} = \min\{c(S) \mid S \text{ חתך}, s\in S, t\notin S\}$$

(לפי sleator) $|f| \triangleq \sum_{v\in V} f(s,v)$

הוכחה: ?

טענה: $\forall \text{flow } f: \quad Flow_{t\to s}(f) = -Flow_{s\to t}(f)$

הוכחה: מיידי מתוך ההגדרה של זרימה כאריזת מסלולי זרימה.
בפרט, כי לאורך כל מסלול הזרימה $s \to t$ היא מינוס הזרימה $t \to s$.

אבל, אפשר להוכיח גם ישירות: מצד אחד,

$$\sum_{v} e(v) = \underbrace{\sum_{v \neq s,t} e(v)}_{=0} + e(s) + e(t) = e(s) + e(t)$$

מצד שני,

$$\sum_{v} e(v) = \sum_{u,v} f(u,v) = 0$$

אנטי סימטריות.

ולכן $e(t) = -e(s)$, כנדרש.

למה: אם $A \subseteq \mathbb{R}$ אז $\min_{a\in A}\{a\} = -\max_{a\in A}\{-a\}$.

מסקנה:

$$\min_{\text{flow } f} \{Flow_{s\to t}(f)\} = -\max_{\text{flow } f}\{Flow_{t\to s}(f)\}$$

ולכן הרדוקציה מזרימה מינימום $s \to t$ לזרימה מקס' $t \to s$ נכונה.

כעת נוכיח משפט: (זרימה מינ = חתך מקס')

$$\min_{\text{flow } f}\{Flow_{s\to t}(f)\} = \max_{s\in S\subseteq V\setminus\{t\}} \{b(\delta(S)) - c(\delta(\bar{S}))\}$$

הוכחה: תהי f^* זרימה מקס' $t \to s$.
יהי $t \in T^* \subseteq V\setminus\{s\}$ חתך רווי ביחס ל f^*.

נקבל:

$$\min_{\text{flow } f}\{Flow_{s\to t}(f)\} = -\max_{\text{flow } f}\{Flow_{t\to s}(f)\}$$

$$= -Flow_{t\to s}(f^*)$$

$$= -\left[c(\delta(T^*)) - b(\delta(\bar{T}^*))\right]$$

$$= -\left[\min_{t\in T\subseteq V\setminus\{s\}} c(\delta(T)) - b(\delta(\bar{T}))\right]$$

$$= \max_{t\in T\subseteq V\setminus\{s\}}\left[b(\delta(\bar{T})) - c(\delta(T))\right]$$

$$= \max_{s\in S\subseteq V\setminus\{t\}}\left[b(\delta(S)) - c(\delta(\bar{S}))\right]$$

$\boxtimes$

נגדיר עבור זרימה מינימום:
קיבול החתך $S \triangleq b(\delta(S)) - c(\delta(\bar{S}))$

ונקבל:
זרימה מינימום = חתך מקסימום.