31/3/11

אלגוריתמים ברשתות

זרימה במחיר מינימום:

- הגדרה
- משפט Klein
- מחירים מופחתים
- אלגוריתם של Klein (ביטול מעגלים שליליים)
- אלגוריתם Scaling

זרימה במחיר מינימום

$G=(V,E)$ גרף מכוון עם קב' קשתות סימטרית $((x,y)\in E \Rightarrow (y,x)\in E)$

$u:E\to\mathbb{R}$ פונקצית קיבולים (מותר $u(e)<0$).

במקום חסמים תחתונים

$c:E\to\mathbb{R}$ פונקצית מחירים אנטי-סימטרית $(c(x,y)=-c(y,x))$

$f:E\to\mathbb{R}$ זרימה מעגלית מקיימת:

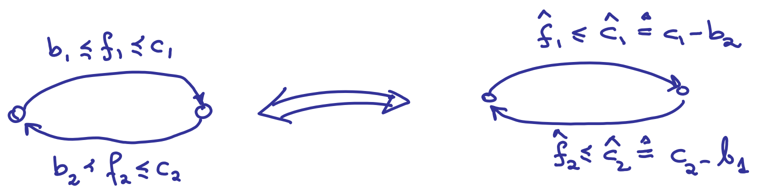
1. אילוץ קיבול $\forall e:\ f(e)\le u(e)$
2. אנטי סימטרית $f(x,y)=-f(y,x)$
3. חוק שימור $\forall x:\ \sum_y f(x,y)=0$

מחיר זרימה $\triangleq$ $cost(f)=\frac{1}{2}\sum_e c(e)\cdot f(e)$

הערות:

1. למה קיבולים שליליים? (דרך לאפשר חסמים תחתונים)

ראינו כבר רדוקציה מהגדרה של זרימה עם חסמים תחתונים לזרימה עם קיבולים שליליים:



---

2. למה מחירים אנטי-סימטריים?

הזרמת יחידת זרימה ב-e עולה $c(e)$.

הזרמה אנטי-סימטרית, ולכן זרימה של יחידה ב-(x,y) גוררת מינוס יחידת זרימה בכיוון (y,x):

מחיר הזרימה ב-(x,y) מחיר הזרימה ב-(y,x)

$$c(x,y)\cdot f(x,y)+c(y,x)\cdot f(y,x)=2\cdot f(x,y)\cdot c(x,y)$$

3. למה לחלק את $\sum c(e)f(e)$ ב-2?

הגרף השיורי: הקיבולים השיוריים לא משנים דבר!

קיבול שיורי: $0 \le r_f(e) \triangleq u(e) - f(e)$

(ואין קושי בהגדרה כי E סימטרית)

קשת שיורית: אם $r_f(e) > 0$.

"ליניאריות" ממשיכה להתקיים:

f זרימה ב-N וגם g זרימה ב-N_f

אז $f+g$ זרימה ב-N.

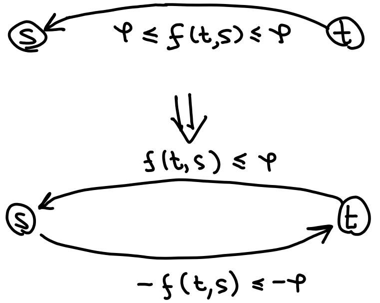
וכן $cost(f+g) = cost(f) + cost(g)$

פירוק למעגלי זרימה ממשיך להתקיים.

④ למה זרימה מעגלית?

מכליל זרימת (s,t) רגילה שבה דורשים $|f| = \varphi$.

רדוקציה:



מכליל גם בעיית: transshipment

מחירים "מופחתים" (reduced costs)

פונקציית מחירים $p: V \to \mathbb{R}$

אינטואיציה: $p(v)$ = מחיר הסחורה ב-V.

מחיר מופחת: $c_p(v,w) \triangleq p(v) + c(v,w) - p(w)$

אינטואיציה: $c_p(v,w)$ = הפסד מקניית סחורה ב-V, הובלתה ל-w ומכירתה ב-w.

טענה:

$\forall (x,y)\in E: \quad c_p(x,y) = -c_p(y,x)$

$\forall\, x \overset{\pi}{\rightsquigarrow} y: \quad c_p(\pi) = p(x) + c(\pi) - p(y)$

$\forall$ cycle γ: $\quad c_p(\gamma) = c(\gamma)$

$\sum_e c_p(e)\cdot f(e) = \sum_e c(e)\cdot f(e)$

משפט (Klein 67): f זרימה במחיר מינימום אמ"ם אין מעגל במחיר שלילי ב-N_f.

הוכחה: $(\Leftarrow)$ זרימה g במעגל במחיר שלילי ב-N_f גוררת:

$cost(f+g) = cost(f) + cost(g) < cost(f)$

$(\Rightarrow)$ תהי f^* זרימה במחיר מינימום המקיימת $cost(f^*) < cost(f)$.

נטען: (f^*-f) היא זרימה חוקית בגרף השיורי N_f.

אילוצי קיבול:

$(f^*-f)(e) = f^*(e) - f(e) \le u(e) - f(e) = r_f(e)$

ובגלל ליניאריות (f^*-f) אנטי-סימטרית ומקיימת שימור זרימה.

אבל $cost(f^*-f)<0 \Rightarrow$ יש ב-N_f מעגל שלילי (כי נפרק את (f^*-f) למעגלי זרימה.

∎

מסקנה: בעי"ת מציאת זרימה במחיר מינימום של מחירים $c(e)$ שקולה למציאת זרימה במחיר מינימום של מחירים מופחתים $c_p(e)$.

משפט (Ford & Fulkerson 62): זרימה מעגלית f היא במחיר מינימום אמ"ם קיימת פונקצית מחירים p עבורה:

$$\forall e\in E:\quad r_f(e)>0 \;\Rightarrow\; c_p(e)\geq 0$$

הוכחה: הכיוון הקל $(\Longrightarrow)$: אם קיימת p עבורה $c_p(e)\geq 0$ לכל קשת שיורית, הרי שברור שאין מעגל שלילי ב-N_f ביחס ל-c_p. לכן f במחיר מינימום ביחס ל-c_p, ולכן גם ביחס ל-c.

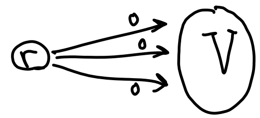
$(\Longleftarrow)$ מחפש p עבורה $0\leq c_p(x,y)=p(x)+c(x,y)-p(y)$ לכל קשת (x,y). כלומר: $p(y)\leq p(x)+c(x,y)$.

למה הדבר דומה? לפונקצית מרחק $p(a)=dist_c(r,a)$

כאשר: r - הוא צומת שממנו נמדדים המרחקים; c - אורכי הקשתות.

צריך להקפיד ש-$dist_c(r,a)$ יהיה מוגדר היטב.

(א) שלא יהיה $+\infty$: כלומר מ-r יש מסלול לכולם... נוסיף צומת חדש r ונחבר לכולם קשת באורך 0.



(ב) שלא יהיה $-\infty$: כלומר שלא נקבל מספר לא חסום של פעמים דרך מעגל שלילי. אבל המרחקים נמדדים ב-E_f, ושם אין מעגל שלילי כי f במחיר מינימום.

ולכן $p(v)\triangleq \min\left\{ c(\pi) \;\middle|\; r \overset{\pi}{\leadsto} v \text{ מסלול ב-} E_f \right\}$

מקיים את הנדרש. ☒

אלגוריתם בטול המעגלים עם מחירים שליליים [Klein 67]

(1) חשב זרימה מעגלית תקינה f.

(2) כל עוד N_f מכיל מעגל γ עם מחיר שלילי: שפר זרימה לאורך γ.

$$\begin{cases} \varepsilon = \min\{ r_f(e) : e\in\gamma \} \\ g \triangleq \text{זרימה בכמות } \varepsilon \text{ לאורך } \gamma \\ f \leftarrow f+g \end{cases}$$

סיבוכיות: אם הקיבולים והמחירים שלמים אז מס' האיטרציות באלג' של קליין חסום ע"י $O(m\cdot U\cdot C)$, כאשר

$U\triangleq \max\{|u(e)|\}_e$, $C\triangleq \max\{|c(e)|\}_e$

הוכחה: כיון שהקיבולים שלמים נקבל שבכל איטרציה $\varepsilon \geq 1$.

כיון שהמחירים שלמים, למעגל שלילי מחיר ≤ -1.

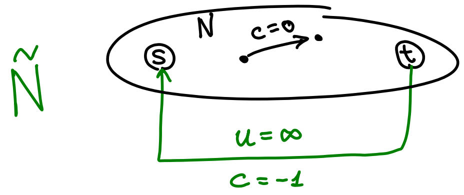
ולכן בכל איטרציה הירידה במחיר ≥ 1.

מאידך $\frac{1}{2}\sum_e c(e)\cdot f(e) \geq -\frac{1}{2} m\cdot C\cdot U$ ☒

זמן ריצה פסאודו-פולינומי...

מציאת זרימה במחיר מינימום מכלילה את הבעיה של מציאת זרימה מקס' (ללא מחירים).

הרדוקציה היא



ואז זרימה מקס' מ s ל-t ממזערת את המחיר בגלל הקשת החדשה מ-t ל-s.

מה עושה האלג' של קליין ברשת הנ"ל?

מעגל שלילי ב $\tilde{N}_f$ $\longleftrightarrow$ מסלול שיפור ברשת השיורית N_f

$\Leftarrow$ קליין מכליל את Ford & Fulkerson!

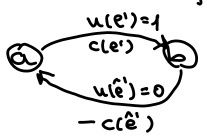
אלגוריתם capacity scaling לזרימה במחיר מינימום

- נניח: קיבולים שלמים לא שליליים, $\forall e: u(e) \in \mathbb{N}$
- נתחיל בשאלה הבאה:

נתונה זרימה f במחיר מינימום ברשת N.

כעת מוסיף קשת $a \xrightarrow{e'} b$ במחיר $c(e')$ וקיבול 1.

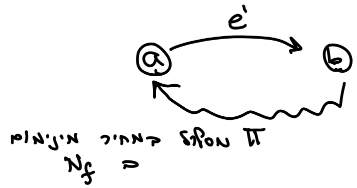
כלומר:



האם ידיעת f ב N עוזרת למציאת זרימה במחיר מינימום ב $N' = N + e'$?

נעיר: אפילו אם $c(e')>0$ יתכן ש-f אינה במחיר מינימום ב N'...

נשאל האם הוספת e' (והקשת ההפוכה) מייצרת מעגל שלילי ברשת N'_f?



מעגל שלילי יתכן רק מהצורה:

כאשר: $c(e') + c(\pi) < 0$

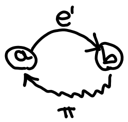
ולכן נחשב מסלול זול ביותר π מ b ל a.

אם $c(e') + c(\pi) \geq 0$, אז אין מעגל שלילי, ו-f נשארת במחיר מינימום גם ב N'. (ונגדיר $f'=f$).

אם $c(e') + c(\pi) < 0$, אז נעביר יחידת זרימה במעגל $e'+\pi$ ונקבל f'.

טענה: f' הינה זרימה במחיר מינימום ברשת N'.

הוכחה: נניח שלא. אז קיים מעגל γ בעל מחיר שלילי ברשת N'_f.



נסמן $S \triangleq \{ v \mid$ קיים מסלול ב N_f מ b ל- $v \}$

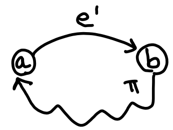
טענה: כל צמתי γ מוכלים ב S.

הוכחה: נחלק לשני מקרים:

(I) γ מכילה קשת שאינה ב N_f.

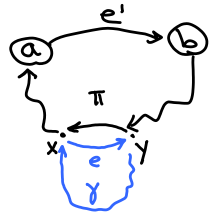
(II) כל קשתות γ ב N_f.

(I) γ מכילה קשת שאינה ב N_f.



תהי: $e \in \gamma \setminus N_f$. בפרט, $e \in N'_f \setminus N_f$.

לכן e קשת הפוכה לקשת לאורך מעגל השיפור $\pi + e'$.



לכל צומת $v \in \gamma$ נגיע ע״פ הרישא של π עד y, ומשם נמשיך לאורך γ.

[הערה: תקנו את הטיעון אם $\gamma \setminus N_f$ מכיל יותר מקשת אחת...]

(II) כל קשתות γ ב N_f

במקרה זה $C(\gamma)<0$ ברשת N_f

$\Leftarrow$ f אינה במחיר מינימום ב N. סתירה.

נחזור להוכחת הטענה לגבי מחיר מינימום של f' ב N'...

תכנית ההוכחה:

נרצה להוכיח $C(\gamma) \geq 0$. איך?

נגדיר פונקצית מחיר $d: S \to \mathbb{R}$

לפי טענת העזר: צמתי v מוכלים ב S, ולכן כולם מקבלים מחיר d.

נוכיח $C_d(\gamma) \geq 0$ (ומכאן $C(\gamma) \geq 0$).

איך?

נוכיח, שלכל קשת $e \in \gamma$ מתקיים $C_d(e) \geq 0$!

הגדרה: $\forall v\in S: d(v) \triangleq \min\{c(\pi') \mid b \overset{\pi'}{\rightsquigarrow} v\}$: d
מסלול π' ב N_f

טענת עזר: לכל קשת $e\in\gamma$ מתקיים $c_d(e)\ge 0$.

הוכחה: 4 אפשרויות:

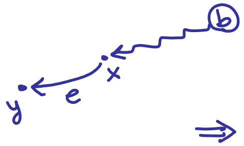
1) $e\in E(N_f)$

2) $e=e'$

3) $e=rev(e')$

4) $e\notin E(N_f)$ וגם $e\notin\{e', rev(e')\}$.

1) $e\in E(N_f)$



לפי הגדרה: $d(y)\le d(x)+c(e)$

$\Rightarrow c_d(x,y) \triangleq d(x)+c(e)-d(y)\ge 0$

2) $e=e'$, כמובן $f'(e')=u(e')$ ולכן $r_{f'}(e')=0$. ולכן $e'\notin N'_{f'}$.

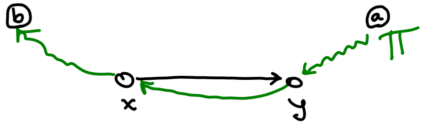
מסקנה $e'\notin\gamma$, ולכן $e\neq e'$.

3) $e=rev(e')$. כלומר $\left.\begin{matrix} e'=(a,b)\\ e=(b,a)\end{matrix}\right\}$.

$$c_d(b,a)=d(b)+c(b,a)-d(a)$$
$$=0-[\underbrace{c(a,b)+c(\pi)}_{\text{שלילי}}]>0$$

4) $e\notin E(N_f)$ וגם $e\notin\{e', rev(e')\}$.

ניתן לדון בקשת $(x,y)\in N'_{f'}$ שאינה ב N_f.



יתכן רק אם $(y,x)\in\pi$.

$$c_d(y,x)=d(y)+c(y,x)-d(x)$$
$$=0 \quad (\text{כי } \pi \text{ מסלול קצר ביותר})$$

ולכן $c_d(x,y)=0$.

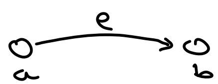
☒

אלג' הדירוג capacity scaling

דומה לאלג' של Gabow. יהי $k=\lceil \lg_2(\max\{u(e)\}+1)\rceil$

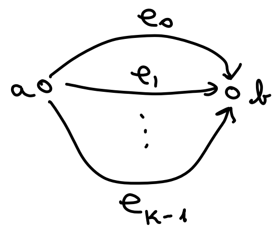
נפצל כל קשת ל k קשתות מקבילות.

הקיבול של הקשת ה-i הוא 2^i או 0, בהתאם לסיבית ה-i בייצוג של $u(e)$.



$u(e)=\langle \alpha_{k-1}\cdots\alpha_0\rangle$

אז $u(e_i)=\alpha_i\cdot 2^i$



נמיין את הקשתות (המשוקללות) לפי קיבול.

$$E_i = \{ e \mid u(e_i) = 2^i \}$$

תיאור האלג':

① מתחיל ברשת (V, E') כאשר $E' = \emptyset$ עם זרימה 0.

② עבור $i=k-1$ ועד 0 בצע:

③ כל עוד קיימת קשת $e \in E_i$ שטרם צורפה ל E':
- הוסף את e ל E' עם קיבול $u(e')=1$ ומחיר $c(e')$.
- חשב זרימה במחיר מינימום f' ב (V,E').

④ הכפל קיבולים וזרימות ב E' פי 2.

⑤ החזר את f.