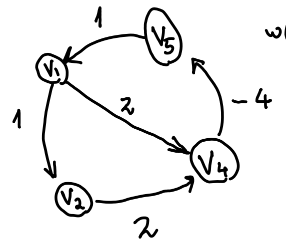
27/3/11

אלג' ברשתות

אלג' למציאת מעגל במשקל ממוצע מזערי: [Karp].

לכל קשת יש אורך $w(e)$



$$C_1 = v_1 \to v_2 \to v_3 \to v_4 \to v_5 \to v_1$$

$$C_2 = v_1 \to v_4 \to v_5 \to v_1$$

$|C_1| = 5$ $\quad w(C_1) = 1+2+(-4)+1 = 0$ $\quad \frac{w(C_1)}{|C_1|} = 0$

$|C_2| = 3$ $\quad w(C_2) = 2+(-4)+1 = -1$ $\quad \frac{w(C_2)}{|C_2|} = \frac{-1}{3}$

אלג' לזרימה במחיר מינימום של גולדברג וטרג'ן.

תיאור האלג':

חשב זרימה מעגלית חוקית f_0.

אתחל $i \leftarrow 0$

כל עוד E_{f_i} מכילה מעגל שלילי:

- מצא מעגל Γ_i ב E_{f_i} במחיר ממוצע מינימום
- שפר זרימה לאורך Γ_i לקבלת f_{i+1}.
- קדם: $i \leftarrow i+1$

החזר f_i.

משפט: מס' האיטרציות של אלג' בטל מעגלים עם מחיר ממוצע מינימום חסום ע"י $O(m \cdot n^2 \cdot \lg n)$.

אלגוריתם למציאת מעגל עם משקל ממוצע מזערי. [Karp]

$G=(V,E)$ - גרף מכוון, בה"כ קשיר היטב.

$w: E \to \mathbb{R}$ - משקל קשתות

נסמן: עבור מסלול P: $w(P) \triangleq \sum_{e \in P} w(e)$

$l(P) \triangleq$ אורך המסלול (מס' קשתות כולל חזרות)

משקל ממוצע: $A(P) \triangleq \frac{w(P)}{l(P)}$

$$\hat{A} \triangleq \min\{ A(C) \mid C \text{ מסלול מעגלי ב-} G \}$$

בעיה: חשב את $\hat{A}$ ומצא מעגל C שמקיים $A(C) = \hat{A}$.

הערות:

(1) $\hat{A}$ מוגדר היטב אם G מכיל מעגל.

(2) קיים מעגל פשוט C שעבורו: $A(C) = \hat{A}$

<u>הוכחה:</u> אם C לא פשוט, ניתן לפרקו ל-2 מעגלים זרים $C_1 \cup C_2 = C$ (C_2, C_1) כאשר כל C_i קצר יותר (ואולי לא פשוט).

$$\frac{w(C)}{\ell(C)} = \frac{w(C_1)+w(C_2)}{\ell(C_1)+\ell(C_2)} \geq MIN\left\{\frac{w(C_1)}{\ell(C_1)}, \frac{w(C_2)}{\ell(C_2)}\right\}$$

ולכן, אם C קצר ביותר בקבוצה $\{C : A(C)=\hat{A}\}$, אז C פשוט.

(3) מעגל פשוט C המקיים $A(C)=\hat{A}$ נקרא מעגל קריטי.

סימונים:

$$w_k(a,b) \triangleq MIN\left\{ w(P) \;\middle|\; \substack{a \overset{P}{\rightsquigarrow} b \\ \ell(P)=k} \right\}$$

(מינימום של קבוצה ריקה הוא $+\infty$).

וכן
$$w_0(a,b) = \begin{cases} 0 & \text{if } a=b \\ \infty & \text{if } a \neq b \end{cases}$$

משפט [Karp]: אם $\hat{A}=0$ אז לכל צומת r מתקיים

$$\min_{v \in V} \max_{0 \le k < n} \left(\frac{w_n(r,v) - w_k(r,v)}{n-k} \right) = 0$$

הוכחה: נתחיל בהוכחת ≥ 0.

אם $\hat{A}=0$, אין אף מעגל שלילי. בפרט G קשיר היטב ולכן מסלול קל ביותר מוגדר היטב:

$$w^*(r,v) \triangleq MIN\left\{ w(P) \;\middle|\; r \overset{P}{\rightsquigarrow} v \right\}$$

כמובן
$$w^*(r,v) = \underset{0 \le k < n}{MIN}\; w_k(r,v)$$

ולכן
$$w_n(r,v) \geq w^*(r,v)$$

נציב ונקבל
$$w_n(r,v) \geq w^*(r,v) = \underset{0 \le k < n}{MIN}\; w_k(r,v)$$

$$\Leftarrow \quad w_n(r,v) - \underset{0 \le k < n}{MIN}\; w_k(r,v) \geq 0$$

$max\, -f(x) = -\min f(x)$

$$\Leftarrow \quad \underset{0 \le k < n}{MAX} \left(w_n(r,v) - w_k(r,v) \right) \geq 0$$

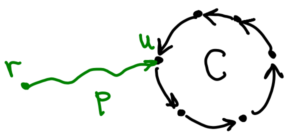
ולכן אגף שמאל ≥ 0.

כעת נראה שאגף שמאל $=0$. כדי להוכיח זאת מספיק להוכיח את הטענה הבאה:

טענה: $\exists v \in V : \quad w_n(r,v) = w^*(r,v)$ ⊛

הוכחה: ....

אם $\hat{A}=0$ אז קיים מעגל פשוט C במשקל 0.



נבחר $u \in C$ כלשהו, ונמצא מסלול קל ביותר P מ-r ל-u.

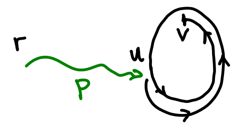
כלומר $w^*(r,u) = w(P)$.

טענה: לכל $i \ge 0$: $P_i \triangleq P \circ C^i$ הוא מסלול קל ביותר מ-r ל-u.

הוכחה: $w(P_i) = w(P) + i \cdot w(C) = w(P) = w^*(r,u)$. ■

מסקנה: כל רישא של P_i היא גם כן מסלול קל ביותר מ-r לצומת האחרון ברישא.

נבחר i מספיק גדול כדי ש $l(P_i) \ge n$.



יהי P' רישא של P_i באורך n.

נסמן ב-v את הצומת האחרון ב P'.

P' מסלול קל ביותר $\Leftarrow$ $w^*(r,v) = w(P')$

P' באורך n $\Leftarrow$ $w_n(r,v) \le w(P')$

לכן $w_n(r,v) \le w^*(r,v)$, ולכן v מקיים את (*).

■

מסקנה: $\forall r: \quad \min_{v \in V} \max_{0 \le k < n} \frac{w_n(r,v) - w_k(r,v)}{n-k} = \hat{A}$

הוכחה: נפחית את המקרה $\hat{A} \ne 0$ למקרה $\hat{A}=0$.

נגדיר $w'(e) \triangleq w(e) + \alpha$. כיצד משפיעה ההזזה על 2 האגפים:

$$A'(C) = \frac{w'(C)}{l(C)} = \frac{w(C) + l(C)\cdot\alpha}{l(C)} = A(C) + \alpha$$

ולכן $\hat{A}' = \hat{A} + \alpha$. יתרה מזאת

$$\{C \mid C \text{ קריטי ביחס ל-} w\} = \{C \mid C \text{ קריטי ביחס ל-} w'\}$$

מאידך:

$$\frac{w'_n(r,v) - w'_k(r,v)}{n-k} = \frac{w_n(r,v) + n\alpha - w_k(r,v) - k\alpha}{n-k}$$

$$= \frac{w_n(r,v) - w_k(r,v)}{n-k} + \alpha$$

ולכן אם $\alpha = -\hat{A}$ נקבל

$$\min_{v} \max_{0 \le k < n} \frac{w_n(r,v) - w_k(r,v)}{n-k}$$

$$= \min_{v} \max_{0 \le k < n} \left(\frac{w'_n(r,v) - w'_k(r,v)}{n-k} \right) - \alpha$$

$$= 0 + \hat{A} = \hat{A}.$$

כדי לחשב w_{i+1} מספיק לעבור סריקה על כל הקשתות.

לכן זמן מילוי הטבלה $O(m\cdot n)$.

(זמן זה שולט גם על זמן הריצה הכללי).

איך מגלים מעגל קריטי?

נניח שיודעים מסלול P מ-r ל-v באורך n שמקיים $w_n(r,v) = w(P)$.

יהי v צומת שמקיים

$$\hat{A} = \max_{0\le k<n} \frac{w_n(r,v)-w_k(r,v)}{n-k}$$

טענה: יהי P מסלול באורך n מ-r ל-v שמקיים $w_n(r,v)=w(P)$. אז כל מעגל פשוט ב-P הוא קריטי.

האלגוריתם

1) קבע $r\in V$, מלא טבלה $w_k(r,v)$ לכל $v\in V$, $0\le k<n$.

2) חשב בזמן $O(n^2)$ את $\hat{A}$ לפי המסקנה.

איך ממלאים טבלה: תכנות דינמי.

$$w_0(r,v) = \begin{cases} 0 & \text{if } r=v \\ \infty & \text{o.w.} \end{cases}$$

$$w_1(r,v) = \begin{cases} w(r,v) & \text{if } (r,v)\in E \\ \infty & \text{o.w.} \end{cases}$$

$$w_{i+1}(r,v) = \min_{\{u \mid (u,v)\in E\}} \left(w_i(r,u) + w(u,v) \right)$$

כיוון ש-$\ell(P)=n$, P אינו מסלול פשוט.

יהי $C\subseteq P$ מעגל פשוט.

אם $w'(C)>0$, אז $P\setminus C$ יותר קל:

$$w'(P\setminus C) < w'(P) = w'^{*}(r,v)$$

בסתירה ל-(**).

אם $w'(C)<0$, אז $\hat{A}'<0$, וסתירה.

ולכן $w'(C)=0 \Leftarrow A'(C)=0 \Leftarrow A(C)=\hat{A}$, כנדרש.

$\boxtimes$

הוכחה: נפעיל את הרדוקציה $\hat{A}\neq 0 \rightsquigarrow \hat{A}=0$.

כבעבר, מעגל קריטי אםם קריטי אחרי הרדוקציה.

טענה: $w'(P)=w'^{*}(r,v)$. (**)

$$\hat{A}'=0 \Rightarrow \max_k \{w'_n(r,v)-w'_k(r,v)\}=0$$

$$\Rightarrow w'_n(r,v)-\min_k\{w'_k(r,v)\}=0$$

$$\Rightarrow w'_n(r,v) = w'^{*}(r,v)$$

אבל, $w'_n(r,v)=w'(P)$, ומשל.