זרימה סטנדרטית f: $\quad f: E \to \mathbb{R}^{\geq 0}$

$$\forall e \in E \qquad 0 \leq f(e) \leq c(e)$$

$$\forall v \in V \setminus \{s,t\} \qquad \sum_{e \in in(v)} f(e) = \sum_{e \in out(v)} f(e)$$

זרימת מסלולים h: $\quad h: P \to \mathbb{R}^{\geq 0}$

כאשר $P =$ קב' המסלולים המכוונים פשוטים מ s ל t.

$$\forall e \in E \qquad \sum_{\{p \in P : e \in p\}} h(p) \leq c(e)$$

משפט: לכל זרימה סטנדרטית $f: E \to \mathbb{N}$

קיימת <u>אריזה</u> של מסלולים $h: P \to \mathbb{N}$

עבורה: (1) $|f| = |h|$

(2) $|f| \geq \left|\{p \in P : h(p) \gneq 0\}\right|$

(3) $\forall e: \sum_{\{p : e \in p\}} h(e) \leq f(e)$

משפט: לכל זרימה פרקציונלית $f: E \to \mathbb{R}^{\geq 0}$

קיימת אריזה של מסלולים $h: P \to \mathbb{R}^{\geq 0}$

עבורה: (1) $|f| = |h|$

(2) $|E| \geq |\{e : f(e)>0\}| \geq |\{p \in P : h(p) \gneq 0\}|$

(3) $\forall e: \sum_{p : e \in p} h(p) \leq f(e)$

<u>הוכחה:</u> באינדוקציה על $|f|$.

<u>בסיס:</u> $|f|=0$, נבחר $h\equiv 0$.

<u>הנחת האינד':</u> לכל f, אם $|f|\leq k$, אז קיימת h כנדרש.

<u>שלב האינד':</u> תהי f זרימה סטנדרטית עם $|f|=k+1$.

קיום מסלול זרימה:

כלומר: $|f|>0 \Rightarrow \exists p\in P\ \forall e\in p:\ f(e)>0$

לפיכך יש מסלול $p^*\in P$ שעבורו $\forall e\in P\ \ f(e)\geq 1$.

נגדיר $f'(e) = \begin{cases} f(e) & \text{if } e\notin p^* \\ f(e)-1 & \text{if } e\in p^* \end{cases}$

כמובן $|f'| = |f|-1 = K$.

נפעיל את ה״א על f': תהי $h': P \to \mathbb{N}$ המקיימת

① $|h'| = |f'|$ ② $K \ge |\{p : h'(p) > 0\}|$. ③ $\forall e:$ $f'(e) \ge \sum_{p: e\in p} h'(p)$

איך נגדיר את h?

$$h(p) = \begin{cases} h'(p) & \text{if } p \neq p^* \\ h'(p)+1 & \text{if } p = p^* \end{cases}$$

$$|h| = |h'| + 1 = |f'| + 1 = |f|$$

$$\left|\{p : h(p) > 0\}\right| \le 1 + \left|\{p : h'(p) > 0\}\right| \le 1 + K = |f'|$$

כדי להשלים את ההוכחה צריך להוכיח ש h היא

אריצה (דהיינו מקיימת את אילוצי הקיבול).

צ"ל $\forall e : \sum_{\{p : e \in p\}} h(p) \le f(e)$

לפי ה"א

$$\sum_{p : e \in p} h'(p) \le f'(e)$$

נבחין בין 2 מקרים:

① $e \notin p^*$ ② $e \in p^*$.

במקרה 1

$$\sum_{p:\,e\in p} h(p) \underset{e\notin p^*}{=} \sum_{p:\,e\in p} h'(p) \le f'(e) \le f(e)$$

במקרה 2

$$\sum_{p:\,e\in p} h(p) = h(p^*) + \sum_{p:\,e\in p,\, p\neq p^*} h(p)$$

$$= 1 + \sum_{p:\,e\in p,\, \underbrace{p\neq p^*}} h'(p) \le 1 + f'(e)$$

$$= f(e)$$

$\boxtimes$

הוכחה: באינד' על $k = |\{e : f(e) > 0\}|$

בסיס: $k=0$ קל.

צעד: $|\{e : f(e)>0\}| = k+1$.

קיים מסלול: יהי $p^* \in \mathcal{P}$ מסלול המקיים $\forall e \in p^* : f(e) > 0$.

$$\varepsilon \triangleq \min\{f(e) \mid e \in p^*\}$$

$$f'(e) = \begin{cases} f(e) & \text{if } e \notin p^* \\ f(e) - \varepsilon & \text{if } e \in p^* \end{cases}$$

נשים לב:

$$|\{e : f'(e) > 0\}| \le k$$

תהי h' אריזת המסלולים המובטחת בסעיף ל f'.

$$h(p) = \begin{cases} h'(p) & \text{if } p \neq p^* \\ h'(p) + \varepsilon & \text{if } p = p^* \end{cases}$$

$$\|h\| = \varepsilon + \|h'\| = \varepsilon + \|f'\| = \|f\|$$

$$|\{p : h(p) > 0\}| \leq 1 + |\{p : h'(p) > 0\}|$$

$$\leq 1 + |\{e : f'(e) > 0\}|$$

$$\leq |\{e : f(e) > 0\}|$$

ושאר ההוכחה בדומה למקרה הקודם...