אלגוריתמים ברשתות - סמסטר א' - תשס"ז - 2006

Note Title 10/21/2006

נושאים להיום:

① תכנון לינארי linear programming

הגדרות + דוגמאות

② התכנית הדואלית

משפט הדואליות (צורה חלשה)

③ בעיות כיסוי ואריזה

דוגמאות

מהי תכנית לינארית?

נתאר בעית אופטימיזציה מעל $\mathbb{R}^n$.

אנו מחפשים וקטור $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n$

המקיים קבוצה של אילוצים לינאריים מהסוג

$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \geq b$.

כיון שיש הרבה אילוצים, נשתמש ב"ייצוג מטריציוני": $A\vec{x} \geq \vec{b}$.

($\vec{x} \geq \vec{y}$ משמע לכל i: $x_i \geq y_i$).

שורות A מייצגות וקטור מקדמים של אילוץ.

הקבוצה $\{\vec{x} : A\vec{x} \geq \vec{b}\}$ נקראת קב' [illegible].

בנוסף, יש וקטור מחירים $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$ (c_i הוא המחיר של x_i).

המחיר של וקטור $\vec{x}$ הוא פשוט $\vec{c}^t \cdot \vec{x}$.

המטרה: למצוא $\vec{x}$ פיזיבילי בעל מחיר מינימום

$$\min \{ \vec{c}^t \cdot x \mid A\vec{x} \geq \vec{b} \}$$

תכנון לינארי - הערות

1) יתכנו גם אילוצי שוויון $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b$

וגם אילוצי $\leq$.

ניתן להפתיר אילוצים מסוג כזה לאילוצי $\geq$.

2) אילוצים מהסוג $x_i \geq 0$, $x_i \leq 0$ נקראים אילוצי סימן.

3) נשתמש רק בוקטורי עמודה (ולא בוקטורי שורה).

4) כדי להקל: לא נכתוב $\vec{x}$ אלא x. (אין סקלרים, הכל וקטורים).

5) לפעמים המטרה היא $\max c^t \cdot x$. קל להפתיר בעית מקס' לבעית מינ'.

6) אם יש אילוצים מהסוג "x_i שלם" או $x_i \in \{0,1\}$, אז הבעיה נקראת [illegible].

תכנון לינארי - דוגמא

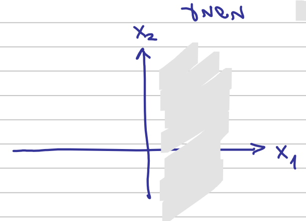
משתנים x_1, x_2.

בעית אופטימיזציה ב $\mathbb{R}^2$.

אפשר לצייר אותה!

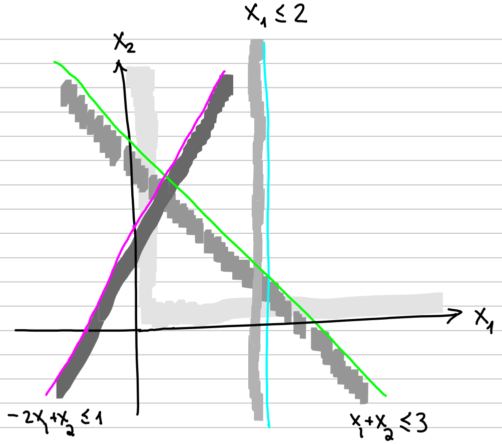
לדוגמא: [illegible] משמע

$$\boxed{\begin{array}{l} \max\ 3x_1 + 2x_2 \\ \text{subject to} \\ \quad -2x_1 + x_2 \leq 1 \\ \quad x_1 \leq 2 \\ \quad x_1 + x_2 \leq 3 \\ \quad x_1, x_2 \geq 0 \end{array}}$$



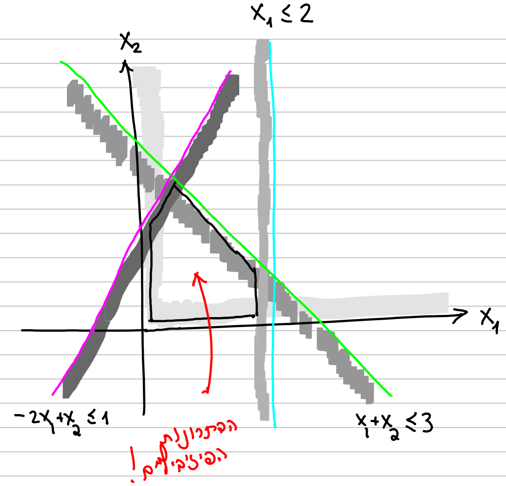
max $3x_1+2x_2$

subject to



max $3x_1+2x_2$

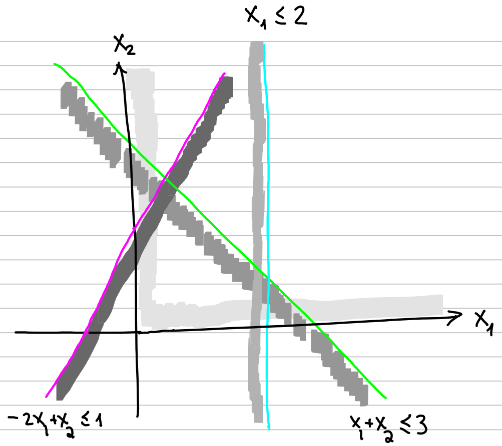
subject to

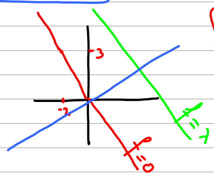


קבוצת הפיזיביליים: חיתוך של חצאי מישור. אם חסום, אני מצולע, יתכן גם שלא סגור

max $3x_1+2x_2$

subject to

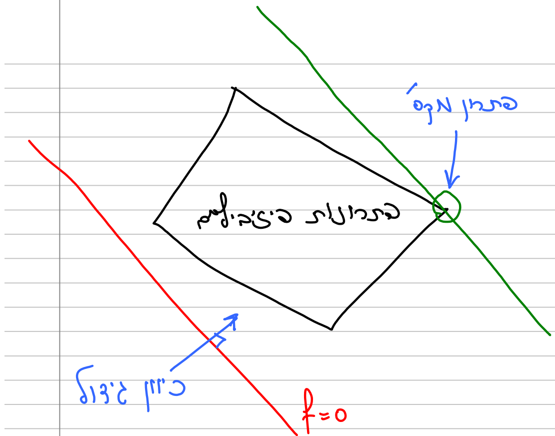




פונקצית המטרה מגדירה כיוון גידול.

$$f(x_1,x_2)=3x_1+2x_2$$

נחפש הצבה מירבית של $f=0$ שתמקסם את f ועדיין תחתוך את המצולע.



הערות:

1) אם קב' הפתרונות הפיזיביליים חסומה, אז פתרון מקסימלי יתקבל תמיד ב[illegible] של המצולע.

2) אם השפה של חצי מישור שמתאים לאילוץ לא משתתפת בהיקף של המצולע, אז האילוץ [illegible].

תכנון לינארי - דוגמה: זרימה ברשתות

רשת זרימה מתוארת ע"י:

$G=(V,E)$: גרף מכוון

$s,t\in V$: מקור ובור בגרף.

$c:E\to\mathbb{R}^{\geq 0}$: קיבול קשתות.

$$\max \sum_{e\in E} f_e$$

s.t.

אילוץ קיבול $\quad \forall e\in E:\ c_e \geq f_e \geq 0$

אילוץ שמירת זרימה $\quad \forall v\in V\setminus\{s,t\}:\ \sum_{e\in in(v)} f_e = \sum_{e\in out(v)} f_e$

תכנית לינארית!

התכנית הדואלית

Primal

(P)
$$\min\ c^t\cdot x \quad \text{s.t.}\quad Ax\geq b,\quad x\geq 0$$

Dual

(D)
$$\max\ y^t\cdot b \quad \text{s.t.}\quad y^tA\leq c^t,\quad y\geq 0$$

הערות: (1) $A\in M_{m\times n}$ נתונים האילוצים. $c\in\mathbb{R}^n$, $b\in\mathbb{R}^m$.

(2) $x\in\mathbb{R}^n$, $y\in\mathbb{R}^m$ משתנים.

(3) זוהי בחירה ספציפית של אילוצים (נוחה להמשך השיעור). יתכנו אילוצי שיווין/אילוצי סימן אחרים.

משפט הדואליות (גרסה חלשה)

אם P ו- D פיזיביליות, אז:

$$\min\{c^tx \mid Ax\geq b,\ x\geq 0\} \geq \max\{y^tb \mid y^tA\leq c^t,\ y\geq 0\}$$

הוכחה: יהיו x פתרון פיזיבילי עבור P, y פתרון פיזיבילי עבור D.

נוכיח כי $c^tx\geq y^tb$:

$$c^tx \geq (y^tA)\cdot x = y^t\cdot(Ax) \geq y^t\cdot b$$

כי $x\geq 0$ וכן $c^t\geq y^tA$; כי $y\geq 0$ וכן $Ax\geq b$ ■

מסקנה: $OPT(P)=-\infty \Rightarrow$ D לא פיזיבילי

$OPT(D)=+\infty \Rightarrow$ P לא פיזיבילי

הערה: בגרסה החזקה משפט הדואליות טוען שמתקיים שיוויון!

בעיות כיסוי ואריזה

דוגמאות לבעיות כיסוי:

- Set Cover. השתמש בקבוצות על מנת לכסות אברים.
- vertex cover. השתמש בצמתים על מנת לכסות קשתות.

דוגמאות לבעיות אריזה:

- matching. ארוז קשתות כך שבכל צומת יהיה נק' קצה של קשת אחת לכל היותר.
- זרימה ברשתות. ארוז מסלולי זרימה כך שלאורך כל קשת, כמות הזרימה לא תעבור מהקיבול.

הרדוקציה של בעיות כיסוי ואריזה באמצעות תכנון בשלמים

כיסוי (Primal)

$\min \ c^t \cdot x$

s.t.

$Ax \geq b$

$x \in \{0,1\}^n$

אריזה (Dual)

$\max \ y^t \cdot b$

s.t.

$y^t A \leq c^t$

$y \in \{0,1\}^m$

הערות:

① בבעיות כיסוי ואריזה, כל רכיבי A,b,c הם שלמים.

② c - וקטור קיבולים

b - וקטור דרישות כיסוי

A_{ij} - מידת הכיסוי ש- j מכסה את i.
מידת הקיבול ש- i תופס ב- j.

כיסוי ואריזה

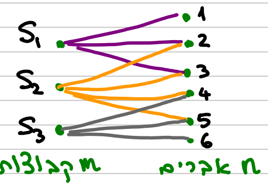
לסיכום:

בבעית כיסוי יש [redacted] ו[redacted].
משתמשים באברים המכסים כדי לכסות אברים עם דרישה.
המטרה: [redacted] אברים מכסים. בעיות כיסוי הן בעיות
[redacted].

בבעיות אריזה יש אברים שניתן לבחור ומשאבים שניתן לנצל.
לכל משאב יש קיבול שאסור לחרוג ממנו.
המטרה: מקסימום אברים באריזה.

כיסוי ואריזה: דוגמה Set Cover

נייצג את הקבוצות והאברים ע"י גרף דו-צדדי:



$S_1 = \{1,2,3\}$

$S_2 = \{2,3,4,5\}$

$S_3 = \{4,5,6\}$

המטריצה $A \in M_{n \times m}$ מכילה שורה לכל אבר ועמודה לכל קבוצה
כאשר $A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } i \in S_j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$.

ולכן מופע של SC ניתן להצגה באופן הבא
$\min \{ c^t x \mid Ax \geq \vec{1},\ x \in \{0,1\}^m \}$
נמיר את אילוצי השלמות $x \in \{0,1\}^m$ באילוצים $x \geq 0$ ונקבל תכנית לינארית.

הרדוקציה של בעיות כיסוי ואריזה באמצעות תכנון ~~בשלמים~~ לינארי.

כיסוי (Primal)

$\min \ c^t \cdot x$

s.t.

$Ax \geq b$

$\cancel{x \in \{0,1\}^n}$

$x \geq 0$

אריזה (Dual)

$\max \ y^t \cdot b$

s.t.

$y^t A \leq c^t$

$\cancel{y \in \{0,1\}^m}$

$y \geq 0$

הערות:

① בבעיות כיסוי ואריזה, כל רכיבי A,b,c הם שלמים.

② c - וקטור קיבולים

b - וקטור דרישות כיסוי

A_{ij} - מידת הכיסוי ש- j מכסה את i.
מידת הקיבול ש- i תופס ב- j.

כיסוי ואריזה: דוגמה Set Cover (המשך).

מה התכנית הדואלית לתכנית $\min\{c^t x \mid Ax \geq \vec{1}, x \geq 0\}$?

התכנית היא $\max\{y^t \cdot \vec{1} \mid y^t A \leq c^t, y \geq 0\}$.

מה המשמעות הקומבינטורית של התכנית הדואלית?

בחר מקס' אברים כך שבכל קבוצה S_j יופיעו לכל היותר c_j אברים, ⇐ אריזה!

כיסוי ואריזה: דוגמה זרימה מקסימום ברשת

רשת זרימה מתוארת ע"י:

$G=(V,E)$: גרף מכוון

$s,t \in V$: מקור ובור בגרף.

$c: E \to \mathbb{R}^{\geq 0}$: קיבול קשתות.

נסמן: $P=\{p_1,p_2,\dots\}$ – קב' כל המסלולים המכוונים מ-s ל-t.

זרימה: פונק' $f: P \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ המקיימת: $\forall e\in E: \sum_{\{p \mid e\in p\}} f(p) \leq c(e)$.

כמות הזרימה המוגדרת ע"י f: $|f| \triangleq \sum_{p\in P} f(p)$

המטרה: למצוא זרימה מקסימום ברשת.

כיסוי ואריזה: דוגמה זרימה מקסימום ברשת (המשך)

התכנית הלינארית המתאימה היא:

$$\boxed{\begin{aligned}&\max\ f^t\cdot\vec{1}\\ &\text{s.t.}\\ &f^tA \leq c\\ &f \geq 0\end{aligned}}$$

תכנית במבנה של תכנית דואלית

כאשר $A \in M_{|P|,|E|}$ (שורה לכל מסלול ועמודה לכל קשת).

הרכיב A_{ij} מוגדר ע"י:

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } e_j \in p_i \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

מה התכנית הפרימלית? $\min\{c^t x \mid Ax \geq \vec{1}, x \geq 0\}$

מה המשמעות הקומבינטורית? נחליף את אילוצי הסימן באילוצי שלמות

ואז $x(e)\in\{0,1\}$ ו- $Ax \geq \vec{1}$ אומר: בכל מסלול יש קשת

עם $x(e)=1$. כלומר, $\{e \mid x(e)=1\}$ מהווה חתך בין s ל-t.

זרימה מקס' וחתך מינימום

ראינו שהתכנית הפרימלית מתאימה לחתך מינימום,
והתכנית הדואלית מתאימה לזרימה מקס'.

משפט הדואליות (גרסה חלשה) ⇐

כמות זרימה מקס' $\leq$ קיבול חתך מינ' (שבור)

ואנחנו יודעים כבר מזמן שיש שיוויון...