אלגוריתמים ברשתות 30.11.06

אלג' למציאת זרימה במחיר מינימום

ע"י ביטול מעגלים שליליים במחיר ממוצע מינימום

Goldberg & Tarjan

Finding Minimum-Cost Circulations by Canceling Negative Cycles

JACM 36:4, 1989

משפט אפיון: זרימה f היא במחיר מינימום אם קיימת פונקצית מחירים $p: V \to \mathbb{R}$ עבורה:

$$\forall e \in E: \quad r_f(e) > 0 \implies c_p(e) \geq 0$$

יהי $\varepsilon \geq 0$.

הגדרה: זרימה f היא ε-אופטימלית אם קיימת פונקצית מחירים $p: V \to \mathbb{R}$ עבורה:

$$\forall e \in E: \quad r_f(e) > 0 \implies c_p(e) \geq -\varepsilon$$

משפט: אם מחירי הקשתות שלמים ואם $0 \leq \varepsilon < \frac{1}{n}$, אז זרימה f שהיא ε-אופטימלית היא במחיר מינימום.

הוכחה: $c(\Gamma) = c_p(\Gamma) \geq -\varepsilon \cdot l(\Gamma) > -\frac{1}{n} \cdot n > -1$

ושלמות המחירים $\Leftarrow$ $c(\Gamma) \geq 0$.

סימון: $\varepsilon(f) \triangleq \text{INF}\{\varepsilon : \underset{\varepsilon \geq 0}{\text{היא}}$ ε-אופט' $f\}$

קשתות שיוריות $E_f \triangleq \{e \in E : r_f(e) > 0\}$

מינימום מחיר מעגל ממוצע בגרף השיורי $\mu(f) \triangleq \hat{A}(E_f)$

p מעידה על כך ש-f היא ε-אופט':

$$\forall e \in E_f: \quad c_p(e) \geq -\varepsilon$$

משפט: אם f אינה במחיר מינימום אז

$$\mu(f) = -\varepsilon(f)$$

משפט: עבור f שאינה במחיר מינ': $\mu(f) = -\varepsilon(f)$

הוכחה: $(\geq)$ יהי Γ מעגל קרי' ב-G_f המקיים $\mu(f) = \frac{c(\Gamma)}{l(\Gamma)}$.

תהי p עדה לכך ש-f היא $\varepsilon(f)$-אופט'.

$$\mu(f) = \frac{c(\Gamma)}{l(\Gamma)} = \frac{c_p(\Gamma)}{l(\Gamma)} \geq \frac{-\varepsilon(f) \cdot l(\Gamma)}{l(\Gamma)} = -\varepsilon(f)$$

כעת נוכיח $\mu(f) \leq -\varepsilon(f)$ $(\varepsilon(f) \leq -\mu(f) \Leftrightarrow)$:

נמצא פונקציה $d: V \to \mathbb{R}$

עבורה $\forall e \in E_f: \quad c_d(e) \geq \mu(f)$

שכן אז $\varepsilon(f) \leq -\mu(f)$.

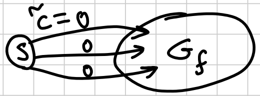
נשתמש בדרך מוכרת:

רדוקציה כדי שמרחקים קצרים יהיו מוגדרים היטב (ביטול מעגלים שליליים + הוספת מקור):

נגדיר $\forall e: \quad \tilde{c}(e) \triangleq c(e) - \mu(f)$

(ולכן $\forall \Gamma: \tilde{c}(\Gamma) \geq 0$).

ונוסיף מקור s לגרף



נגדיר $d(v) = dist_{\tilde{c}}(s, v)$

ונקבל: $\forall (v,w) \in E_f: \quad d(w) \leq d(v) + \tilde{c}(v,w)$

$$= d(v) + c(v,w) - \mu(f)$$

$$\Leftarrow \quad \mu(f) \leq d(v) + c(v,w) - d(w)$$

$$= c_d(v,w)$$

☒

הגדרה: קשת $e \in E_f$ היא ==קבילה== ביחס ל-p אם $c_p(e) < 0$.

$$E(f,p) \triangleq \{ e \in E \mid e \in E_f \ \& \ c_p(e) < 0 \}$$

$$G(f,p) \triangleq (V, E(f,p))$$

אינטואיציה: f במחיר מינימום אם $E(f,p)$ ריקה,

מסקנה עזר: תהי f לא במחיר מינימום. אם $\mu(f) = \frac{c(\Gamma)}{l(\Gamma)}$,

Γ קריט' ב G_f

ויהי p מעידה על כך ש-f היא $\varepsilon(f)$ אופט'

אז $\forall e \in \Gamma: \ c_p(e) = \mu(f) = -\varepsilon(f)$

הוכחה: $\forall e \in \Gamma: \quad c_p(e) \geq -\varepsilon(f) = \mu(f)$

ולכן

$$\mu(f) = \frac{c_p(\Gamma)}{l(\Gamma)} \geq \frac{\mu(f) \cdot l(\Gamma)}{l(\Gamma)} = \mu(f)$$

משמע השוויון מתקיים בכל קשת $e \in \Gamma$, כנדרש.

כלומר:

"המחיר המופחת של כל קשת במעגל הקריט' שווה למחיר הממוצע"

תרגיל: אם p מעיד על $\varepsilon(f)$, ו-f אינה במחיר מינ' אז: $G(f,p)$ מכיל מעגל במחיר שלילי.

למה: תהי f זרימה ε-אופט' (עבור $\varepsilon \geq 0$).

יהי p עד לכך ש-f היא ε-אופט'.

אם $G(f,p)$ הוא חסר מעגלים אז $\varepsilon(f) \leq (1 - \frac{1}{n}) \cdot \varepsilon$.

הערות: - א. אפשר להפעיל את הלמה "שוב ושוב" כיון שנקבל p' עבורו $G(f,p')$ מכיל מעגל.

- הלמה מועילה: נתחיל בזרימה שהיא 1-אופט'.

נבטל מעגלים עד ש $G(f,p)$ אציקלי

$$f_K \longleftarrow \cdots \longleftarrow f_2 \longleftarrow f_1 \longleftarrow f_0$$

f_0: 1-אופט'; f_1: $(1-\frac{1}{n})$-אופט'; f_2: $(1-\frac{1}{n})^2$-אופט'; f_K: $(1-\frac{1}{n})^K$-אופט'

$K = n \cdot \ln n$ $\Leftarrow$ $\frac{1}{n}$-אופט' ואז במחירים שלמים נקבל מחיר מינ'.

תאור האלג:

חשב זרימה מעגלית חוקית f_0.

אתחל $i \leftarrow 0$

כל עוד E_{f_i} מכילה מעגל שלילי:

- מצא מעגל Γ_i ב-E_{f_i} במחיר ממוצע מינימום $\left(A(\Gamma_i)=\mu(f_i)\right)$
- שפר זרימה לאורך Γ_i לקבלת f_{i+1}.
- קדם: $i \leftarrow i+1$

החזר f_i.

סימון: p_i מעידה של $\varepsilon(f_i)$-אופט' של f_i.

ראינו שלכל $e\in\Gamma_i$: $c_{p_i}(e)=-\varepsilon(f_i)$.

הוכחת הלמה: צ"ל $G(f,p)$ א-ציקלי $\Leftarrow$ $\varepsilon(f)\le(1-\frac{1}{n})\cdot\varepsilon$.

אם f אינה במחיר מינימום, מספיק להוכיח $-\mu(f)\le(1-\frac{1}{n})\cdot\varepsilon$

כלומר $\mu(f)\ge-(1-\frac{1}{n})\cdot\varepsilon$. יהי Γ מעגל פשוט ב-G_f.

$$\frac{c(\Gamma)}{\ell(\Gamma)}=\frac{c_p(\Gamma)}{\ell(\Gamma)}=\frac{c_p^{\ge 0}(\Gamma)}{\ell(\Gamma)}+\frac{c_p^{<0}(\Gamma)}{\ell(\Gamma)}$$

$$\ge \frac{c_p^{<0}(\Gamma)}{\ell(\Gamma)}$$

מתעלמים מקשתות Γ עם מחיר מופחת ≥ 0

$$\ge \frac{(-\varepsilon)\cdot(\ell(\Gamma)-1)}{\ell(\Gamma)}$$

לא לכל קשתות Γ יש מחיר מופחת שלילי

$$\ge(-\varepsilon)\cdot\left(\frac{n-1}{n}\right)=(-\varepsilon)\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

$\boxtimes$

למה: $\varepsilon(f_m)\le(1-\frac{1}{n})\cdot\varepsilon(f_0)$

$\boxed{\text{אחרי } m \text{ איטרציות מובטח שיפור}}$

הוכחה: נסמן

$$j\triangleq MIN\{i<m \mid \Gamma_i \text{ אינו מעגל ב- } G(f_i,p_0)\}$$

(אם הקב' ריקה, אז $j=m$).

(I) אם $j=m$, אז $\Gamma_0,\Gamma_1,\dots,\Gamma_{m-1}$ מעגלים ב-$G(f_i,p_0)$.

נשים לב כי $\forall i<m: E(f_{i+1},p_0)\subsetneq E(f_i,p_0)$.

הסבר: נבחין ב-3 סוגי קשתות:

(א) $e\notin\Gamma_i\cup rev(\Gamma_i)$: במקרה זה $r_{f_{i+1}}(e)=r_{f_i}(e)$

למה: $\forall i\le i_{last}:\ \varepsilon(f_{i+1})\le\varepsilon(f_i)$

הוכחה: מספיק להראות ש-p_i מעידה גם על $\varepsilon(f_i)$-אופט' של f_{i+1}. כלומר, $\forall e\in E_{f_{i+1}}:\ c_{p_i}(e)\ge-\varepsilon(f_i)$.

נשים לב כי $c_{p_i}(e)$ אינה תלויה בזרימה. אבל יתכן שקיימת e מקיימת $e\in E_{f_{i+1}}\setminus E_{f_i}$!

הקשתות היחידות בהפרש הזה נמצאות ב-$reverse(\Gamma_i)$.

יהי $e\in\Gamma_i$ אז:

$$c_{p_i}(rev(e))=-c_{p_i}(e)\underset{\uparrow}{=}\varepsilon(f_i)>0.$$

לפי טענת העזר

$\square$

ולכן G_{f_m} חסר מעגלים שליליים, ולכן f_m במחיר מינ׳ ובנוסף $\mathcal{E}(f_m)=0$.

$\boxed{\text{II}}$ אם $j<m$, נראה ש- $\mathcal{E}(f_m) \le \mathcal{E}(f_j) \le (1-\frac{1}{n})\cdot\mathcal{E}(f_0)$

$$\frac{c(\Gamma_j)}{l(\Gamma_j)} = \frac{c_{p_0}(\Gamma_j)}{l(\Gamma_j)} \ge \frac{c_{p_0}^{<0}(\Gamma_j)}{l(\Gamma_j)} \ge -\mathcal{E}(f_0)\cdot\frac{l(\Gamma_j)-1}{l(\Gamma_j)}$$

Γ_j אינו מעגל ב-$G(f_{j-1},p_0)$

$$\ge -\mathcal{E}(f_0)\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

ולכן $e\in E(f_i,p_0) \iff e\in E(f_{i+1},p_0)$.

(ב) $e\in\Gamma_i$: במקרה זה $r_{f_{i+1}}(e) \le r_{f_i}(e)$.
ויתרה מזאת, לפחות קשת אחת ב-Γ_i נהפכת לרוויה. ולכן קשת זו (ואולי נוספות) נמצאת ב-$E(f_i,p_0)$ ולא נמצאות ב-$E(f_{i+1},p_0)$.

(ג) $e\in rev(\Gamma_i)$. ולכן $rev(e)\in\Gamma_i$. כיון ש-$\Gamma_i\subseteq G(f_i,p_0)$, מתקיים ש- $c_{p_0}(rev(e))<0$.
ולכן $c_{p_0}(e) = -c_{p_0}(rev(e)) > 0$.
משמע $e\notin E(f_{i+1},p_0)$.

$\Leftarrow$ $|E(f_m,p_0)| \le |E(f_0,p_0)| - m \le 0$

כעת נוכיח חסמים פולינומיים ב-m, n למספר האיטרציות.

הגדרה: קשת e היא ε-קבועה אם קיים ערך φ_e כך שמתקיים: $\forall f: \mathcal{E}(f)\le\varepsilon \Rightarrow f(e)=\varphi_e$.

אינטואיציה: אם כל הקשתות קבועות אז f במחיר מינ׳.

משפט: יהי $\varepsilon>0$, f זרימה מעגלית, p פונק׳ שמעידה על ε-אופט׳ של f.

$\forall e: |c_p(e)| \ge 2n\cdot\varepsilon \Rightarrow$ e היא ε-קבועה

הערות: ① e ε-קבועה $\Leftarrow$ $rev(e)$ ε-קבועה.
② לכן מספיק להוכיח $2n\varepsilon\le c_p(e)$
$\Leftarrow$ e היא ε-קבועה.

משפט: אם מחירי הקשתות שלמים, אזי אלג׳ ביטול המעגלים עם מחיר ממוצע מינימום עוצר אחרי $O(n\cdot m\cdot \lg(n\cdot C))$ איטרציות.

הוכחה: נוכיח כי $f_{O(nm\lg(nC))}$ היא זרימה במחיר מינ׳.

כמובן $\varepsilon_0\le C$. וכן $\varepsilon_m\le(1-\frac{1}{n})\cdot C$

ולכן $\varepsilon_{km}\le(1-\frac{1}{n})^{k}\cdot C$

נציב $k\ge n\cdot\ln(nC)$ ונקבל

$$\varepsilon_{km}\le\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n\ln(nC)}\cdot C$$

$$(1-x<e^{-x}) \quad < e^{-\ln(nC)}\cdot C$$

$$= e^{-\ln n-\ln C+\ln C} = \frac{1}{n}$$

וראינו שאם המחירים שלמים וכן $\mathcal{E}(f)<\frac{1}{n}$, אזי f במחיר מינימום.

∎

נגדיר $E_> \triangleq \{ e' \in E : f'(e') > f(e') \}$

כמובן $E_> \subseteq E_f$.

כרגיל, $(f'-f)$ היא זרימה מעגלית ב G_f

ומקיימת $(f'-f)(e) > 0$.

יהי Γ מעגל זרימה ב $(f'-f)$ שמכיל את e.

$$c(\Gamma) = c_p(\Gamma) = c_p(e) + c_p(\Gamma \setminus e)$$

$$\geq 2n\varepsilon + (-\varepsilon)\cdot(\ell(\Gamma)-1)$$

$$> n\varepsilon$$

$\Leftarrow$

$A(rev(\Gamma)) < -\varepsilon \Leftarrow c(rev(\Gamma)) < -n\varepsilon$, בסתירה. ⊠

הוכחה: (א) נניח: אם f' היא ε-אופט' וגם $f'(e) \neq f(e)$

אז $f'(e) > f(e)$.

הסבר: $rev(e)$ רוויה לפי f כי:

$r_f(rev(e)) = 0 \Longrightarrow c_p(rev(e)) \leq -2n\varepsilon$.

ולכן $f(rev(e)) = u(rev(e))$. אבל $f'(rev(e)) \neq f(rev(e))$ ולכן

בגלל אנטי סימטריות: $f'(rev(e)) < f(rev(e))$

ולכן $f'(e) > f(e)$, כנדרש.

(ב) כעת נסתור את ההנחה ש-f' היא ε-אופט'

ע"י כך שנמצא מעגל Γ ב $G_{f'}$ שמקיים

$A(\Gamma) < -\varepsilon$.

ואז כעבור $m\cdot k$ איטרציות, כל הקשתות קבועות....

כזכור $A(\Gamma_i) = -\varepsilon(f_i)$

$$< 2n\cdot\varepsilon(f_{i+k})$$

ולכן יש ב Γ_i קשת e_i המקיימת $c_{p_{i+k}}(e_i) < 2n\varepsilon(f_{i+k})$.

ולכן e_i היא $\varepsilon(f_{i+k})$-קבועה.

נראה ש-e_i אינה $\varepsilon(f_i)$-קבועה:

f_{i+1} שיפר זרימה ב e_i, ולכן e_i אינה $\varepsilon(f_i)$ קבועה.

⊠

משפט: מס' האיטרציות של אלג' ביטול מעגלים עם מחיר ממוצע מינימום חסום ע"י $O(m\cdot n^2\cdot \lg n)$.

הוכחה: הוכחנו $\varepsilon(f_{m+i}) < (1-\frac{1}{n})\,\varepsilon(f_i)$

ולכן אם $K = m\cdot n\cdot(\lceil \ln n\rceil + 1)$, אז

$$\varepsilon(f_{K+i}) < (1-\tfrac{1}{n})^{K/m}\cdot\varepsilon(f_i)$$

$$< e^{-(\ln n+1)}\cdot\varepsilon(f_i)$$

$$< \frac{1}{2n}\cdot\varepsilon(f_i).$$

הכלה $\supseteq$ נובעת מ $\varepsilon(f_{i+k}) \leq \varepsilon(f_i)$

טענה: אם האלג' הגיע לאיטרציה $i+k$ אז

$$\{e \mid e \text{ היא } \varepsilon(f_{i+k}) \text{ קבועה}\} \supsetneq \{e \mid e \text{ היא } \varepsilon(f_i) \text{ קבועה}\}$$