3/12/06

אלגוריתמים ברשתות

מציאת שידוך מקסימום (בגודל) בגרף כללי

הגדרה: יהי M שידוך. מסלול p נקרא **מסלול הרחבה** אם הוא מקיים:

(א) p מסלול מתחלף: $p = v_0 \overset{e_1}{\frown} v_1 \overset{e_2}{\frown} v_2 \cdots \overset{e_k}{\frown} v_k$

כל קשת שניה לאורך p שייכת ל M.

(ב) הקשת הראשונה והאחרונה ב p אינן ב M.

מסלול הרחבה: (1) אורך אי-זוגי

(2) מתחיל ונגמר בצמתות חשוף.

(3) הרחבה:

$$M \leftarrow \left(M \setminus E(p_{even})\right) \cup E(p_{odd})$$

מגדילה את M בקשת אחת.

מסקנה: אם p מסלול הרחבה ביחס לשידוך M, אזי $M \oplus E(p)$ הוא שידוך בגודל $|M|+1$.

הוכחה: p מסלול באורך אי-זוגי, והקשתות הזוגיות שלו ב M, ולכן $|M \oplus E(p)| = |M|+1$.

כעת נראה ש $M' \triangleq M \oplus E(p)$ שידוך.

$$M \oplus E(p) = \left(M \setminus E(p)\right) \cup \left(E(p) \setminus M\right)$$

אם $e_1, e_2 \in M'$ חולקות צומת אז נחלק למקרים:

(1) $e_1, e_2 \in M \setminus E(p)$

(2) $e_1, e_2 \in E(p) \setminus M$

(3) $e_1 \in M \setminus E(p)$ & $e_2 \in E(p) \setminus M$.

ובכל המקרים נקבל סתירה. ⊠

משפט (Berge, Norman & Rabin): M שידוך מירבי אמ"מ לא קיים מסלול הרחבה ביחס ל M.

הוכחה: (⇐) אם קיים מסלול הרחבה, אז ראינו ש M לא מירבי.

(⇒) אם M לא מירבי, יהי M^* שידוך מירבי: $|M| < |M^*|$.

כעת נשתמש ב M^* למציאת מסלול הרחבה.

נתבונן בקשתות ההפרש הסימטרי: $D = M \oplus M^*$

כל צומת נוגע לכל היותר 2 קשתות ב D, ולכן הגרף המושרה ע"י D מקיים: כל רכיב קשירות הוא מסלול או מעגל. וכל מסלול/מעגל הוא מתחלף.

במעגל $\Gamma \subseteq D$ נקבל $|\Gamma \cap M| = |\Gamma \cap M^*|$.

מכאן שקיים מסלול $p \subseteq D$ עבורו $|p \cap M| < |p \cap M^*|$. ⊠

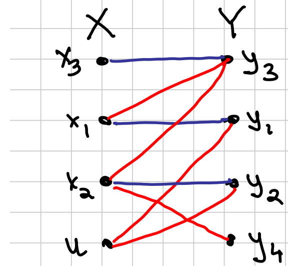
מסקנות :

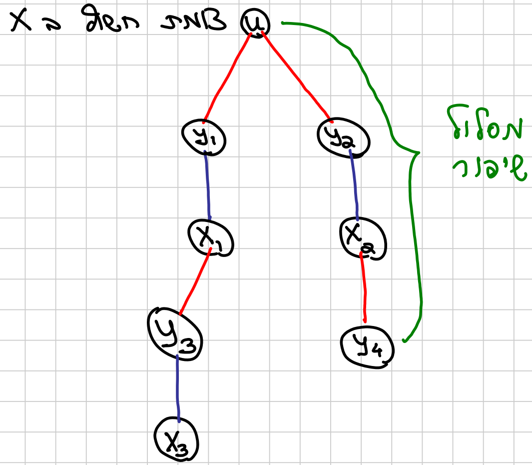
(1) לכל שידוך M, קיים שידוך מירבי M^* המקיים

$$\forall v\in V : deg_{M^*}(v) \geq deg_M(v)$$

(2) אם יודע למצוא מסלול הרחבה, אז יודע למצוא שידוך מקסימום.

נעבור לגרפים דו-צדדים (המקרה הקל).





שורש : צומת חופשי ב- X

שכבות מתחלפות : אדום | כחול

לא סוגר מעגל : מסמן צמתים שכבר ביקרנו בהם.

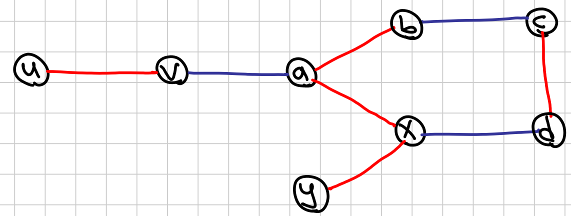
- אם גידול עץ מגיע לצומת חופשי ב-Y, אז מצאנו מסלול שיפור.
- אם גידול עץ נעצר כאשר כל העלים $\subseteq X$, אז עבר לצומת חופשי הבא שטרם ביקרנו בו.

"עץ הונגרי"

- אם כל העצים הונגרים, אז טען ש-M מקסימום.

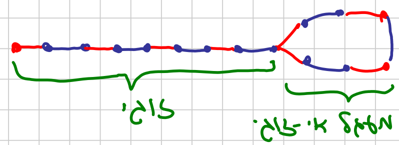
מה הקשר לאלג׳ של Ford&Fulk. ?

מה קורה בגרף שאינו דו-צדדי ?

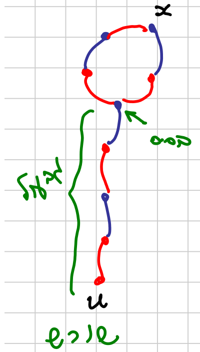


- ראשית נקבל קשת cd בין 2 צמתים באותה שכבה של העץ.
- נמצא מסלול הרחבה : u–v–a–b–c–d–x–y .

מקור הקושי :



הגדרה: יהי M שידוך ו- u צומת חשוף.



פרח (flower): איחוד של 2 מסלולים מתחלפים (פשוטים) p_1, p_2 מ u ל x כאשר $|p_1|$ זוגי, $|p_2|$ אי-זוגי.

גבעול (stem): הרישא המקסימלית המשותפת של p_1, p_2

בסיס: הצומת הראשון שבו p_1, p_2 מתפצלים.

פריחה (blossom): המעגל האי-זוגי $p_1 \oplus p_2$.

$G_{|B}$: הגרף המתקבל מ-G ע"י כיווץ B.

משפט Edmonds:

יהי M שידוך ב G ו-B פריחה ביחס ל M.

קיים מסלול הרחבה ב G ביחס ל M iff

קיים מסלול הרחבה ב $G_{|B}$ ביחס ל $M \setminus B$.

טענת עזר:

קיים מסלול באורך זוגי מהשורש u לכל צומת בפריחה.

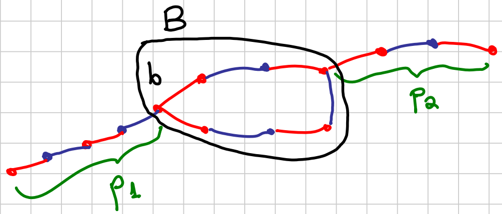
- מסלול זה נכנס לצומת בפריחה עם קשת של M.

הוכחת המשפט:

נתחיל בהוכחה שאם p מסלול הרחבה ב $G_{|B}$ ביחס ל $M \setminus B$, אז קיים מסלול הרחבה ב G ביחס ל M.

אם p אינו חולף דרך הצומת שמתקבל מכיווץ B, אז p הוא המסלול המבוקש ב G.

אחרת



אם p מסלול הרחבה ב $G_{|B}$ ביחס ל $M \setminus B$ אז