14.12.06

אלגוריתמים ברשתות

מבוא לתכנות לינארי:

הגאומטריה של תכנות לינארי.

תהי: $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ פונקציה.

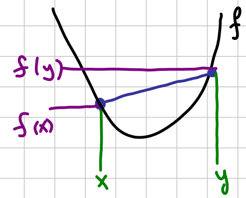
f היא **לינארית** אם $f(x) = Ax + b$

עבור $A \in M_{n\times m}$, $b \in \mathbb{R}^n$.

f היא **קמורה** convex אם $n=1$ וכן

$\forall x,y \in \mathbb{R}^m \ \forall \lambda \in [0,1]:$

$$f(\lambda x) + f((1-\lambda)y) \geq f(\lambda x + (1-\lambda)y)$$



גאומטריה: הקטע בין $f(x)$ ל $f(y)$

לא יורד מתחת לגרף של f.

f היא **קעורה** concave אם $-f$ קמורה.

תרגיל: אם $f_1,\dots,f_m$ קמורות אזי

$$f(x) \triangleq \mathrm{MAX}\{f_1(x),\dots,f_m(x)\}$$

גם כן קמורה.

תזכורת מאלגברה לינארית:

תהא A מטריצה ריבועית $n\times n$. הטענות הבאות שקולות:

1. A הפיכה.
2. A^t הפיכה
3. $\det(A) \neq 0$
4. שורות A בת"ל לינארית
5. עמודות A בת"ל לינארית
6. לכל $b \in \mathbb{R}^n$ יש למערכת $Ax=b$ פתרון יחיד.
7. קיים $b \in \mathbb{R}^n$ עבורו למערכת $Ax=b$ יש פתרון יחיד.

משפט

יהי S תת מרחב לינארי הנפרש ע"י $x^1,\dots,x^k$.

נניח $\dim(S)=m$.

① קיים בסיס של S המורכב מ-m וקטורים מהקבוצה
$$\{x^1,\dots,x^k\}$$

② אם $l\le m$ ונתון $x^1,\dots,x^l$ בת"ל, אז ניתן להשלים לבסיס ע"י $m-l$ וקטורים מהקבוצה $\{x^{l+1},\dots,x^k\}$.

תת מרחב וקטורי: $U\subseteq\mathbb{R}^n$ היא תת מרחב אם

$$\forall a,b\in\mathbb{R}\ \ \forall x,y\in U:\quad ax+by\in U$$

המרחב הנפרש ע"י $x^1\dots x^k\in\mathbb{R}^n$:

$$\left\{\sum_{i=1}^{k} a_i x^i \;\middle|\; a_1,\dots,a_k\in\mathbb{R}\right\}$$

אי-תלות: $x^1\dots x^k\in\mathbb{R}^n$ הם בת"ל לינארית

אם: $\forall a_1,\dots,a_k\in\mathbb{R}:\ \sum_{i=1}^{k} a_i x^i=0 \Rightarrow a_1=a_2=\dots=a_k=0$

מימד של תת מרחב U: גודל מקסימלי של קבוצה בת"ל לינארית ב-U. מסומן ע"י $\dim(U)$.

בסיס: קב' בת"ל של וקטורים ב-U שגודלה $\dim(U)$ וקטורים.

הגדרה, פוליהדרון polyhedron
$$\{x\in\mathbb{R}^n \mid Ax\ge b\}$$

$S\subseteq\mathbb{R}^n$ **חסומה** אם קיים קבוע K כך שלכל $x\in S$:
$\|x\|\le K$.

היפר מישור
$$\{x\in\mathbb{R}^n:\ a^t x=b\}$$

חצי מרחב
$$\{x\in\mathbb{R}^n:\ a^t x\ge b\}$$

הערות: ① a ניצב להיפר-מישור $\{x\mid a^t x=b\}$

② פוליהדרון הוא חיתוך של חצאי מרחב.

③ היפר מישור הוא מרחב אפיני ממימד $n-1$.

תת מרחב אפיני

$$S=S_0+x^0$$

$S_0\subseteq\mathbb{R}^n$ - תת מרחב וקטורי.

$x^0\in\mathbb{R}^n$ - וקטור

מימד $S \triangleq$ מימד S_0.

משפט:

① חיתוך של קבוצות קמורות הוא קמור.

② כל פוליהדרון הוא קמור.

③ צירוף קמור של מס' סופי של איברי קבוצה קמורה שייך לקבוצה הקמורה.

④ הקמור של מס' סופי של וקטורים הוא קבוצה קמורה.

קבוצות קמורות

$S \subseteq \mathbb{R}^n$ היא **קמורה** אם

$$\forall x,y \in S \ \ \forall \lambda \in [0,1]:$$

$$\lambda \cdot x + (1-\lambda) y \in S$$

צירוף קמור: $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i$

כאשר $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$, $\forall i: \lambda_i \geq 0$.

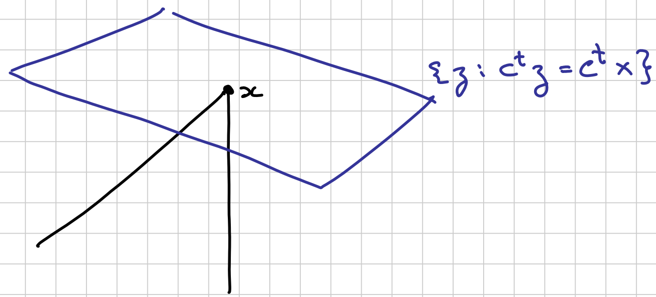
קמור: בהינתן $x^1,\dots,x^k \in \mathbb{R}^n$ הקמור שלהם הוא הקבוצה

convex hull

$$\left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i \ \middle|\ \forall i: \lambda_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \right\}$$

הגדרה: $x \in P$ נקרא **קודקוד** אם קיים וקטור c המקיים

$$\forall y \in P \setminus \{x\}: \ c^t y < c^t x$$



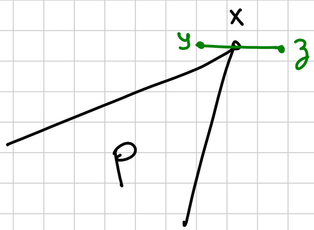
הגדרה: יהי $P = \{x : Ax \geq b\}$ פוליהדרון.

נקודה $x \in P$ נקראת **נק' קיצון** אם לא קיימות

נקודות $y,z \in P$ וסקלר $\lambda \in [0,1]$

① $y \neq x$ וגם $z \neq x$.

② $x = \lambda y + (1-\lambda) z$



נסתכל במערכת אי שוויונות $Ax \ge b$.

אם אי-שוויון מתקיים בשוויון, נאמר שאי השוויון **פעיל**

משפט: יהי $x^* \in \mathbb{R}^n$ ותהי $I = \{i \mid a_i^t x^* = b_i\}$.

אז: הטענות הבאות שקולות

① הקבוצה $\{a_i \mid i \in I\}$ מכילה n וקטורים בת"ל.

② הקבוצה $\{a_i \mid i \in I\}$ פורשת את $\mathbb{R}^n$.

③ למערכת השוויונות $a_i^t x = b_i \ \forall i \in I$ יש פתרון יחיד.

הגדרה: יהי $P \subseteq \mathbb{R}^n$ פוליהדרון המוגדר ע"י אילוצי שוויון ואילוצי אי שוויון.

① x^* הוא **פתרון בסיסי** אם הוא מספק את כל אילוצי השוויון, וכן מבין האילוצים הפעילים יש n אילוצים בת"ל. (יתכן שאילוצי אי-שוויון לא מתקיימים!)

② אם x^* הוא פתרון בסיסי וכל האילוצים מתקיימים, אז x^* הוא **פתרון בסיסי פיזיבילי**

משפט יהי $P \subseteq \mathbb{R}^n$ פוליהדרון לא ריק. יהי $x^* \in P$.

שלוש הטענות הבאות שקולות:

① x^* קודקוד

② x^* נקודת קיצון

③ x^* פתרון בסיסי פיזיבילי