אלגוריתמים בהשמות 4.12.07

- חזרה על שיטת האלימינציה של Fourier-Motzkin
- הלמה של Farkas + וריאציות
- משפט דואליות בצורתו החזקה

תזכורת: אלימינציה בשיטת Fourier-Motzkin

① נכתוב $Ax\le b$: $\left(\bar{x}\triangleq\langle x_2,\dots,x_n\rangle,\ \bar{a}_i\triangleq\langle a_{i2},\dots,a_{in}\rangle\right)$

$$x_1+\bar{a}_i\bar{x}\le b_i \qquad 1\le i\le m_1$$

$$-x_1+\bar{a}_i\bar{x}\le b_i \qquad m_1<i\le m_2$$

$$\bar{a}_i\bar{x}\le b_i \qquad m_2<i\le m$$

② היפטר מהמשתנה x_1:

$$\forall i\in[1,m_1]\ \forall j\in[m_1+1,m_2]:$$

$$-b_j+\bar{a}_j\bar{x}\le x_1\le b_i-\bar{a}_i x$$

$$\Longleftrightarrow\qquad (\bar{a}_j+\bar{a}_i)\cdot\bar{x}\le b_i+b_j$$

$$\forall i\in[m_2+1,m]:\qquad \bar{a}_i\bar{x}\le b_i$$

מסקנה: יהיו

$$P\triangleq\{x\in\mathbb{R}^n \mid Ax\le b\}$$

$$Q\triangleq\{\bar{x}\in\mathbb{R}^{n-1} \mid \tilde{A}\bar{x}\le\tilde{b}\}$$

כאשר $\tilde{A},\tilde{b}$ מתאימים לאילוצים אחרי האלימינציה של x_1

אז

$$Q=\Pi_{\{2,\dots,n\}}(P)$$

למה של Farkas: 2 התנאים הבאים שקולים:

① הפוליהדרון $P=\{Ax\le b\}$ אינו ריק.

② לא קיים וקטור $y\ge0$ עבורו: $y^tA=0$ & $y^tb<0$.

הוכחה $(1)\Rightarrow(2)$:

אם $A\tilde{x}\le b$ וכן $y\ge0$ מקיים $y^tA=0$ & $y^tb<0$

אזי

$$0>y^tb\ \underset{\substack{y\ge0\\ A\tilde{x}\le b \text{ וכן}}}{\ge}\ y^t(A\tilde{x})=(y^tA)\tilde{x}=0$$

וסתירה.

לפני שנוכיח $(2)\Rightarrow(1)$ נבחן 2 דוגמאות:

דוגמה 1: A מטריצה 1×1:

$$(a=0\Rightarrow b\ge0)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} b\ge0 \text{ וכן } a=0 \\ a\neq0 \text{ או} \end{array}\right\}\Leftrightarrow \exists x: ax\le b$$

$$\neg(x\to y)\equiv x\wedge\neg y$$

$$(b<0\ \&\ a=0)\Leftrightarrow \exists y\ge0: \left\{\begin{array}{l} ya=0 \\ \text{וכן} \\ yb<0 \end{array}\right. \text{ אבל}$$

דוגמא 2: A מטריצה $m\times 1$.

נניח שאין פתרון למערכת $\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots \\ a_m\end{pmatrix} x \le b$

2 אפשרויות:

(א) קיים אינדקס i עבורו $a_i=0$ בעוד $b<0$.

נשים לב שאם $a_i=0$ אבל $b\ge 0$, אז האילוץ $a_i x\le b$ מיותר כי הוא מסתפק לכל x. ולכן אם (א) לא מתקיים, משמע $\forall i: a_i\neq 0$.

(ב) קיימים שני אינדקסים $i\neq j$ עבורם

$$\left\{\begin{array}{ll} a_i>0 \text{ ולכן } & x\le b_i/a_i \\ a_j<0 \text{ ולכן } & x\ge b_j/a_j \end{array}\right. \Rightarrow \frac{b_j}{a_j}\le\frac{b_i}{a_i}$$

אבל $\frac{b_j}{a_j} > \frac{b_i}{a_i}$ $\left(\Leftrightarrow a_i b_j < a_j b_i\right)$

נבנה $y\ge 0$ ע"י ההגדרה $y \triangleq -a_j e^i + a_i e^j$

$$a_i, -a_j > 0 \Rightarrow y \ge 0$$

$$y^t A = a_j a_i - a_i a_j = 0$$

אבל $y^t b = -a_j b_i + a_i b_j < 0$

כעת נוכיח ② ⇐ ① [באופן שקול ¬① ⇐ ¬②]

ההוכחה באינדוקציה על מס' עמודות A.

בסיס האינדוקציה עבור $n=1$ הוכח בדוגמא 2.

נעבור לשלב האינדוקציה...

נפעיל את שיטת האלימינציה של Fourier-Motzkin על המערכת $Ax\le b$.

תהי $\tilde A\bar x\le\tilde b$ המערכת מעל $n-1$ משתנים.

$\emptyset=\{x\mid Ax\le b\} \Rightarrow \emptyset = \{\bar x\mid\tilde A\bar x\le\tilde b\}$, ולפי הנחת האינדוקציה: קיים $\tilde y\ge 0$ עבורו $\tilde y^t\tilde A=0$ & $\tilde y^t\tilde b<0$.

כעת נבנה את y בעזרת $\tilde y$:

הערה 1: $\tilde y^t\cdot(\tilde A\mid\tilde b) = 0^{n-1}\circ -1$

הערה 2: $\tilde y^t\cdot(0\mid\tilde A\mid\tilde b) = 0^{n}\circ -1$

הערה 3: כל שורה של $\tilde A$ היא שורה a_i של A (שבהם $a_{i1}=0$) או סכום a_r+a_s של שורות A (שמקיימים $a_{r1}+a_{s1}=0$).

הערה 4: כל שורה של $(0,\tilde A)$ היא שורה של A או סכום של 2 שורות של A.

כיון ש-$0^n\circ -1$ מוכל בחרוט שנפרש ע"י שורות $(0\mid\tilde A\mid b)$,

מהערה 4 ⇐ $0^n\circ -1$ גם בחרוט שנפרש ע"י שורות $(A\mid b)$.

יהי $y\ge 0$ וקטור המקדמים עבורו $y^t(A\mid b)=0^n\circ -1$.

y הוא הוקטור המבוקש. ☒

גירסה 2 ללמה של Farkas

קיים $x\ge 0$ עבורו $Ax=b$ אמ"מ לא קיים וקטור y עבורו $y^tA\ge 0$ & $y^tb<0$.

הוכחה: $P=\{x\ge 0 : Ax=b\} = \{x \mid Ax\le b,\ -Ax\le -b,\ x\ge 0\}$

ולכן נגדיר $A'=\begin{pmatrix}A\\-A\\-I\end{pmatrix}$ $b'=\begin{pmatrix}b\\-b\\0\end{pmatrix}$

ואז $P=\{x \mid A'x\le b'\}$

לפי הלמה של פרקש: $P\neq\emptyset \iff \nexists y\ge 0 : y^tA'=0$ & $y^tb'<0$

$\iff \nexists \alpha,\beta,\gamma\ge 0\ \ (\alpha^t-\beta^t)A-\gamma I=0$ & $(\alpha^t-\beta^t)b<0$

נגדיר $y\triangleq \alpha-\beta$

$\iff \nexists y : y^tA\ge 0$ & $y^tb<0$

תוצאה: יהי $P=\{x \mid Ax\le b\}\neq\emptyset$.
לכל $x\in P$ מתקיים:

$$c^tx\le\delta$$

אמ"מ

$$\exists y\ge 0 : y^tA=c^t \ \&\ y^tb\le\delta$$

הוכחה: אם $y\ge 0$, $y^tA=c^t$, וכן $y^tb\le\delta$ אזי

$$c^tx=y^tAx\underset{y\ge 0}{\le} y^tb\le\delta$$

אם אין y כזה משמע שהמערכת

$$(y^t\ \lambda)\begin{pmatrix}A & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}=(c^t\ \delta)$$

אין פתרון $(y^t\ \lambda)\ge 0$.

לפי הלמה של פרקש, קיים וקטור $\begin{pmatrix}z\\ \mu\end{pmatrix}\ge 0$

שמקיים

$$\begin{pmatrix}A & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z\\ \mu\end{pmatrix}=0$$

וכן

$$(c^t\ \delta)\begin{pmatrix}z\\ \mu\end{pmatrix}<0$$

נחלק ל-2 מקרים: $\mu=0$ וכן $\mu>0$.

(I) אם $\mu=0$ אזי $Az=0$
$c^tz<0$

יהי $x^0\in P$: $A(x^0-\tau z)\le Ax^0\le b$

ולכן $\{x^0-\tau z \mid \tau\in\mathbb{R}\}\subseteq P$

אבל $c^t(x^0-\tau z)=c^tx^0-\tau c^tz\xrightarrow[\tau\to\infty]{}\infty$

ולכן קיים $x\in P$ עבורו $c^tx>\delta$.

(II) אם $\mu>0$

$$\left.\begin{aligned}Az+b\mu&=0\\ c^tz+\delta\mu&<0\end{aligned}\right\}$$

נגדיר $x=-\frac{1}{\mu}\cdot z$ ונקבל

$$Ax=-\frac{1}{\mu}Az=b \quad \& \quad c^tx=-\frac{1}{\mu}c^tz>\delta$$

משמע $x\in P$ ומקיים $c^tx>\delta$, בניגוד.

משפט דואליות (צורה חלשה)

$P \triangleq \{ x \mid Ax \le b \}$

$Q \triangleq \{ y \mid y \ge 0 \ \&\ y^tA = c^t \}$

לכל $\tilde{x} \in P$ ולכל $\tilde{y} \in Q$ מתקיים:

$c^t \tilde{x} \le \tilde{y}^t b$

הוכחה:

$c^t \tilde{x} = (\tilde{y}^t A)\tilde{x} = \tilde{y}^t (A\tilde{x})$

$\ge \tilde{y}^t \cdot b$ (כי: $\tilde{y} \ge 0$)

משפט דואליות (צורה חזקה) [Von Neumann - 47]

$\max\{ c^t x \mid Ax \le b \} = \min\{ y^t b \mid y \ge 0, y^tA = c^t \}$

אם ב הפוליהדרונים אינם ריקים.

הוכחה: $\delta \triangleq \sup\{ c^t x \mid Ax \le b \}$

$\gamma \triangleq \inf\{ y^t b \mid y \ge 0, y^tA = c^t \}$

דואליות חלשה $\Leftarrow$ $\delta \le \gamma$.

מהגדרת δ: $Ax \le b \Leftarrow c^t x \le \delta$.

לפי התוצאה הקודמת, קיים $y \ge 0$ עבורו

$y^tA = c^t \ \&\ y^t b \le \delta$

לכן $\gamma \le \delta$, כנדרש.

כבר הוכחנו: $\exists x : Ax \le b \ \&\ c^t x = \delta$

$\exists y : y \ge 0 \ \&\ y^tA = c^t \ \&\ y^t b = \gamma$

אפשר גם להוכיח את זה ע"י שימוש בלמה של פרקש...

גרסא נוספת: אם ב הפוליהדרונים אינם ריקים, אז

$\max\{ c^t x \mid x \ge 0, Ax = b \} = \min\{ y^t b \mid y^tA \ge c^t \}$

נבצע רדוקציה מהצורה הסטנדרטית לצורה $Ax \le b$:

$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A \\ -A \\ -I \end{pmatrix} \qquad \tilde{b} = \begin{pmatrix} b \\ -b \\ 0 \end{pmatrix}$

ואז $\{ x : Ax = b, x \ge 0 \} = \{ x \mid \tilde{A}x \le \tilde{b} \}$

ולכן גם ה-max של כל אחד שווה.

מסקנה: $\delta = \max\{ c^t x \mid x \ge 0, Ax = b \}$

$= \max\{ c^t x \mid \tilde{A}x \le \tilde{b} \}$

$$= \min \left\{ z^t \tilde{b} \;\middle|\; z \geq 0 ,\; z^t \tilde{A} = c^t \right\}$$

נכתוב: $z = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ ואז

$$z^t \tilde{A} = u^t A - v^t A - w \quad = c^t$$

$$z^t \tilde{b} = u^t b - v^t b \quad = \delta$$

נגדיר $y \triangleq u - v$

$$z^t A = y^t A - w \implies y^t A \geq c^t$$

$$z^t \tilde{b} = y^t b = \delta$$

ולכן

$$\delta = \min \left\{ y^t b \;\middle|\; y^t A \geq c^t \right\}$$