7.1.07

אלגוריתמים ברשתות

דואליות

משפטי רופפות משלימה

ראינו שהתכניות

$$P: \quad \min\{c^t x \mid Ax=b,\ x\geq 0\}$$

$$D: \quad \max\{y^t b \mid y^t A \leq c^t\}$$

הן דואליות.

כלומר: אם הפוליהדרונים המתאימים אינם ריקים, אז ערך המינ' המתאים ל P שווה לערך המקס' המתאים ל D.

האם יש שיטה שמסבירה כיצד מתקבלת התוכנית הדואלית מתוך התוכנית הפרימאלית?

התכנית הדואלית מספקת חסם תחתון

$$P: \quad \min\{c^t x : Ax=b,\ x\geq 0\}$$

נחליף את P בתוכנית עם פחות אילוצים:

$$\forall y\in\mathbb{R}^m:\ g(y) \triangleq \min\{c^t x + y^t(b-Ax) \mid x\geq 0\}$$

נשים לב: 1 $y\in\mathbb{R}^m$, וכל רכיב y_i מצביע "קנס" להפרת האילוץ $a_i x = b_i$.

2 אם $\exists x\in P$ אז $\forall y\in\mathbb{R}^m: g(y)\leq c^t x$

ולכן אם x^* אופטי' ב P אז $\forall y:\ g(y)\leq c^t x^*$

מסקנה: $\max\{g(y) \mid y\in\mathbb{R}^m\}\leq c^t x^*$

וקיבלנו חסם תחתון לערך התכנית הלינארית, כנדרש.

אבל: מה הקשר בין $\max g(y)$ לבין התוכנית הדואלית ?!

$$g(y) = \min_{x\geq 0} c^t x + y^t(b-Ax)$$

$$= y^t b + \min_{x\geq 0}(c^t - y^t A)x$$

הבחנה: $\min_{x\geq 0}(c^t - y^t A)x = \begin{cases} 0 & \text{if } c^t - y^t A \geq 0 \\ -\infty & \text{o.w.} \end{cases}$

הערך שלנו ב $g(y)$ הוא בתנאי חסם תחתון, ולכן

$$\max_{y\in\mathbb{R}^m}\{g(y)\} = \max\{y^tb + \min_{x\geq 0}(c^t-y^tA)x\}$$

$$= \max\{y^tb \mid c^t - y^tA \geq 0\}$$

$$= \boxed{\max\{y^tb \mid y^tA \leq c^t\}}$$

בנינו את התוכנית הדואלית כך שתקיים <u>דואליות חלשה</u>.

ההפתעה: החסם התחתון הדוק! (דואליות <u>חזקה</u>).

<u>בניית התוכנית הדואלית עבור $\min\{c^tx \mid Ax\geq b\}$</u>

① נוסיף משתנים כדי לקבל אילוצי שיוויון:

$$Ax\geq b \iff \exists s\in\mathbb{R}^m: \; s\geq 0 \;\&\; Ax-s=b$$

② ולכן

$$\min\{c^tx \mid Ax\geq b\} = \min\left\{\tilde{c}^t\binom{x}{s} \;\middle|\; \tilde{A}\binom{x}{s}=b,\; s\geq 0\right\}$$

כאשר:

$$\tilde{c} \triangleq (c \mid 0\cdots 0) \qquad \tilde{A}\triangleq (A\mid -I)$$

$$g(y) \triangleq \min_{x \text{ חופשי}, s\geq 0}\left[\tilde{c}^t\binom{x}{s} + y^t\left(b-\tilde{A}\binom{x}{s}\right)\right]$$

$$= y^tb + \min_{\substack{s\geq 0\\ x \text{ חופשי}}}(\tilde{c}^t - y^t\tilde{A})\binom{x}{s}$$

$$= y^tb + \min_{\substack{s\geq 0\\ x \text{ חופשי}}}\{c^tx - y^t(Ax-s)\}$$

$$= y^tb + \min_{x \text{ חופשי}}(c^t-y^tA)x + \min_{s\geq 0} y^ts$$

נשים לב:

$$\min_{s\geq 0} y^ts = \begin{cases} 0 & \text{if } y\geq 0\\ -\infty & \text{o.w.}\end{cases}$$

$$\min_{x \text{ חופשי}}(c^t-y^tA)x = \begin{cases} 0 & \text{if } c^t-y^tA=0\\ -\infty & \text{o.w.}\end{cases}$$

ולכן $\max g(y) = \max\{y^tb \mid y\geq 0 \;\&\; y^tA=c^t\}$

<u>סיכום</u>

<u>תכנית דואלית</u>	<u>תכנית פרימלית</u>
$\max\{y^tb \mid y^tA\leq c^t\}$	$\min\{c^tx \mid Ax=b,\; x\geq 0\}$
$\max\{y^tb \mid y^tA=c^t,\; y\geq 0\}$	$\min\{c^tx \mid Ax\geq b\}$

טרנספורמציה דיקדוקית מתכנית פרימלית לדואלית

תכנית פרימלית		תכנית דואלית	
$\min\ c^t x$		$\max\ y^t b$	
s.t.		s.t.	
$a_i x \geq b_i$	$i \in M_1$	$y_i \geq 0$	$i \in M_1$
$a_i x \leq b_i$	$i \in M_2$	$y_i \leq 0$	$i \in M_2$
$a_i x = b_i$	$i \in M_3$	y_i free	$i \in M_3$
$x_j \geq 0$	$j \in N_1$	$y^t A^j \leq c_j$	$j \in N_1$
$x_j \leq 0$	$j \in N_2$	$y^t A^j \geq c_j$	$j \in N_2$
x_j free	$j \in N_3$	$y^t A^j = c_j$	$j \in N_3$

הפיכת בעית מקס' לבעיה מינ' (כפל ב -1)

נניח שהבעיה היא: $P: \max\{c^t x \mid Ax \leq b\}$

נגדיר בעיה $P': -\min\{-c^t x \mid Ax \leq b\}$

אזי:

① x פיזיבילי עבור P $\Longleftrightarrow$ x פיזיבילי עבור P'

② אם x^* אופ' ביחס ל P ו $\tilde{x}$ אופט' ביחס ל P' אזי:

$$c^t x^* = c^t \tilde{x}$$

ולכן הבעיות שקולות!

טענה: $\text{dual}(\text{dual}(P)) \approx P$

$$\begin{tikzcd}
D=\text{dual}(P) \text{ בעיה מקסימיזציה} \arrow[r, leftrightarrow, "\text{דואליות}"] \arrow[d, leftrightarrow, "\text{כפל ב } (-1)"'] & P \text{ בעיה מינ'} \arrow[d, leftrightarrow, "\text{כפל ב } (-1)"] \\
P' \text{ בעיה מינימיזציה שקולה ל- } D \arrow[r, leftrightarrow, "\text{דואליות}"'] & \text{dual}(P') \text{ בעיה מקס' שקולה}
\end{tikzcd}$$

הרחבות:

① $Ax \geq b \Longrightarrow \begin{cases} Ax - s = b \\ s \geq 0 \end{cases}$

② x free $\Longrightarrow \begin{cases} x = x^+ - x^- \\ x^+, x^- \geq 0 \end{cases}$

③ מחיקת שורות תלויות ב $(A|b)$.

בכל תכנית לינארית מתקיימת אחת האפשרויות הבאות:

① קיים פתרון אופטימלי.

② התכנית לא חסומה (בבעית מינ' האופטימום הוא $-\infty$, בבעית מקסימום האופטימום הוא $+\infty$).

③ לא קיים פתרון פיזיבילי.

צירופים אפשריים בבעיה פרימלית/דואלית:

פרימלי \ דואלי	אופ' סופ	לא חסומה	לא פיזיבילית
אופט' סופ'	אפשרי.	לא אפשרי.	לא אפשרי.
לא חסומה	לא אפשרי.	לא אפשרי.	אפשרי.
לא פיזיבילית	לא אפשרי.	אפשרי.	לא אפשרי.

דואליות חלשה (תכנית בצורה כללית)

אם x פתרון פיזיבילי של תכנית פרימלית P

ו y פתרון פיזיבילי של תכנית דואלית D

אז

$$c^t x \ge y^t b$$

הוכחה:

$$u_i \triangleq y_i(a_i x - b_i) \qquad i=1..m$$

$$v_j \triangleq (c_j - y^t A^j)\cdot x_j \qquad j=1..n$$

לפי הגדרת דואליות:

$y_i \ge 0 \Leftarrow a_i x \ge b_i$

$y_i \le 0 \Leftarrow a_i x \le b_i$

y_i חופשי $\Leftarrow a_i x = b_i$

ולכן $u_i \ge 0$ ובאותו אופן $0 \le v_j$.

$$\sum_i u_i = \sum_i y_i(a_i x - b_i) = (y^t A)x - y^t b$$

$$\sum_j v_j = \sum (c_j - y^t A^j)x_j = c^t x - (y^t A)x$$

$$0 \le \sum_i u_i + \sum_j v_j = c^t x - y^t b \qquad \boxtimes$$

Complementary Slackness

אם x ו- p פתרונות פיזיבליים לתכנית פרימלית ודואלית, בהתאמה, אז:

x ו- p פתרונות אופטימליים אמ"מ

$$\begin{cases} \forall i & p_i(a_i \cdot x - b_i) = 0 \\ \forall j & (c_j - p^t A^j)x_j = 0 \end{cases}$$

הוכחה: אם x, p אופט', אז לפי דואליות חזקה $c^t x = p^t b$, ולכן $\sum u_i + \sum v_j = 0$.

אם $\sum u_i + \sum v_j = 0$, אז $c^t x = p^t b$, ומדואליות חלשה נובעת אופט'.

- מציאת פתרון דואלי אופט' מפתרון פרימלי אופט' של מעוין.

אפליקציה: asset pricing

n נכסים.

m מצבים סופיים אפשריים.

r_{si} = שווי נכס i במצב s.

$(r_{1i},\dots,r_{mi})$ - וקטור המתאר שווי i בכל המצבים.

$$R = \begin{array}{c} \text{נכסים} \\ \boxed{\begin{array}{cc} n & \\ & m \end{array}} \end{array} \text{מצבים} \qquad . \; R=[r_{ij}]$$

x_i — כמות נכס i.

$x=(x_1,..,x_n)$ - וקטור אחזקות (לא כל הרכיבים חיוביים!)

שווי האחזקות x במצב s הוא

$$w_s = \sum_{i=1}^{n} r_{si}\cdot x_i = r_s\cdot x$$

הוקטור w: $\quad w = Rx$

מתאר שווי האחזקות בכל מצב.

p - וקטור מחירי הנכסים בהתחלה.

p_i - מחיר הנכס ה-i.

רכישת האחזקות x עולה $p^t x$.

<u>השאלה</u>: בהינתן R, מה צריך להיות p?

הכלל לתשובה הוא? היעדר ארביטראז'!

"לא ניתן להרוויח בבטחון מהשקעה שלילית".

$$Rx \ge 0 \Longrightarrow p^t x \ge 0$$

<u>משפט</u>: התנאי "היעדר ארביטראז'" מתקיים אמ"מ

$$\exists\, q=(q_1\dots q_m)\ge 0 : \quad p^t = q^t R$$

<u>הוכחה</u>: אין ארביטראז' $\Leftrightarrow \{\neg\exists x : Rx\ge 0 \;\&\; p^t x<0\}$

$\Leftrightarrow$ (למה של פרקש) יש פתרון $q\ge 0$ למערכת $q^t R = p^t$. $\boxtimes$