18.1.07 אלגוריתמים ברשתות

1) שימוש ב- complementary slackness

2) מבוא לאלג' קירוב לבעיות כיסוי ואריזה.

primal dual alg.

Complementary Slackness

אם x ו- p פתרונות פיזיביליים לתכנית פרימלית ודואלית, בהתאמה, אז:

x ו- p פתרונות אופטימליים אמ"מ

$$\begin{cases} \forall i \quad p_i(a_i\cdot x - b_i) = 0 & \text{:תנאי רפיון דואליים} \\ \forall j \quad (c_j - p^t A^j)\, x_j = 0 & \text{:תנאי רפיון פרימליים} \end{cases}$$

הערות

① אם התכנית הפרימלית היא בצורה סטנדרטית, כלומר $\min\{c^t x \mid Ax=b\}$, אז תנאי הרפיון הדואליים מתקיימים לכל x פיזיבילי.

② אם התכנית הפרימלית אינה בצורה סטנדרטית, תנאי רפיון דואלי אומר: $a_i x \neq b_i \implies p_i = 0$

③ אם התכנית הפרימלית היא בצורה סטנדרטית, x^* פתרון $\underbrace{\text{בסיסי}}_{}$ (אופטימלי) פיזיבילי וגם x^* לא מנוון אז תנאי רפיון משלימה מאפשרים למצוא פתרון דואלי אופטימלי: כיצד?

תהי B מטריצה הבסיס המתאימה ל x^*.

$$\min\{c^t x \mid Ax=b,\ x\geq 0\}$$

$$\max\{y^t b \mid y^t A \leq c^t\}$$

אם j הוא אינדקס בבסיס, אז $x_j>0$ (אין ניוון) ולכן $y^t A^j = c_j$.

ולכן $y^t\cdot B = c_B$ (כאשר c_B הוא c על רכיבי הבסיס)

$\Leftarrow$ $\boxed{y^t = c_B\cdot B^{-1}}$ מקיים תנאי רפיון פרימלי, ולכן y הוא פתרון דואלי אופטימלי!

למה y פיזיבילי?

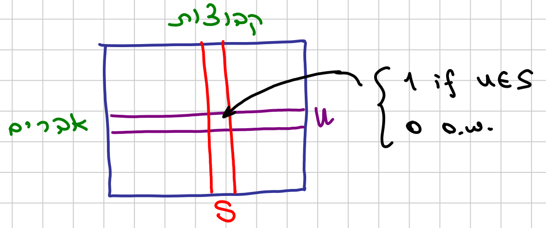
שימוש במשפט complementary slackness

רלקסציה שבורה עבור Weighted Set Cover

$$\min\{c^t x \mid \forall u: \sum_{\{S: u\in S\}} x(S) \ge 1,\ x \ge 0\}$$

מטריצת האילוצים:

(מטריצה של הכלה)



הבעיה הדואלית:

$$\max\{\sum_u y(u) \mid y \ge 0,\ \forall S: \sum_{u\in S} y(u) \le c(S)\}$$

תנאי רפיפות משלימה:

$$\forall S: \quad x(S)\cdot\Big(c(S) - \sum_{u\in S} y(u)\Big) = 0$$

$$\forall u \quad y(u)\cdot\Big(\sum_{\{S: u\in S\}} x(S) - 1\Big) = 0$$

עבור $\alpha,\beta \ge 1$ נגדיר

תנאי רפיפות משלימה (α,β) מוחלשים:

$\forall S:$ $x(S)=0$ או $\frac{1}{\alpha}c(S) \le \sum_{u\in S} y(u) \le c(S)$

$\forall u:$ $y(u)=0$ או $1 \le \sum_{S\ni u} x(S) \le \beta$

<u>טענה:</u> אם x, y פתרונות פיזיבילים ומקיימים תנאי רפיפות משלימה (α,β) מוחלשים, אז $c^t x \le (\alpha\beta)\cdot y^t \cdot \vec{1}$.

<u>מסקנה:</u> $c^t x \le \alpha\beta \cdot opt(primal)$

<u>הוכחת המסקנה:</u>

$$c^t x \underset{\text{לפי הטענה}}{\le} (\alpha\beta)\, y^t 1 \underset{\text{דואליות חלשה}}{\le} (\alpha\beta)\cdot c^t x^*$$

הוכחת הטענה:

$$c^t x = \sum_S c(S)\,x(S)$$

$$\le \sum_S \Big(\alpha \sum_{u\in S} y(u)\Big) x(S)$$

$$= \alpha \sum_u y(u)\Big(\sum_{S: u\in S} x(S)\Big)$$

$$\le \alpha \sum_u y(u)\cdot\beta = (\alpha\beta)\, y^t\cdot\vec{1}$$

∎

נשתמש ברעיון לקבלת אלג' קירוב עם יחס קירוב f

כאשר:

$$deg(u) \triangleq |\{S : u\in S\}|$$

$$f \triangleq \max_u deg(u)$$

הערה: מהי בעית כיסוי בקודקודים כאשר $f=2$?

ונבחר אוסף $\{S_{i_1},\dots,S_{i_k}\}$ המקיים:

$$S_{i_1}\cup\dots\cup S_{i_k} = U$$

וכן $\sum_{j=1}^{k} c(S_{i_j}) \le f\cdot opt(\text{weighted set cover})$

איך? נגדיר $\alpha = 1$, $\beta = f$ ואז:

תיאור האלגוריתם (Primal - Dual)

① איתחול: $x \leftarrow 0,\ y \leftarrow 0$. [מקיים תנאי רפיון משלימה (1,f) מורחבים!]

② כל עוד x אינו כיסוי בקבוצות עשה:

(א) בחר אבר $\tilde{u}$ שאינו מכוסה.

(ב) $\delta \triangleq \min_{S:\tilde{u}\in S}\left\{c(S) - \sum_{u\in S} y(u)\right\}$

(ג) $y(\tilde{u}) \leftarrow y(\tilde{u}) + \delta$

(ד) צרף כל S שהתהדקה לכיסוי x:

$$\forall S:\ c(S) - \sum_{u\in S} y(u) = 0 \Rightarrow x(S) \leftarrow 1$$

③ החזר x.

תנאי רפיון משלימה (1,f) מורחבים:

$\forall S:$ $x(S)=0$ או $\sum_{u\in S} y(u) = c(S)$

$\forall u:$ $y(u)=0$ או $1 \le \sum_{S\ni u} x(S) \le f$

מינוח: S הדוקה אם $c(S) = \sum_{u\in S} y(u)$.

הכללים:

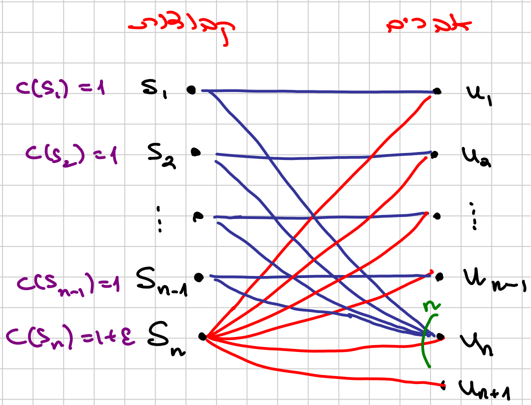
⓪ x וקטור בינארי $x\in\{0,1\}^n$.

① S בכיסוי $(x(S)=1)$ אם״ם S הדוקה.

② אם $0 < y(u)$ אז u מכוסה לכל היותר ע״י f.

למה כלל ② מתקיים תמיד?

דוגמא:



כמובן הכיסוי הטוב הוא $\{S_n\}$ ומשקלו $1+\varepsilon$.

מה עושה האלג'?

למשל:

בוחר u_n ומעלה $y(u_n)$ ל-1.

ואז כל הקבוצות $S_1,\dots,S_{n-1}$ מתהדקות ומצטרפות לכיסוי.

ואז בוחר u_{n+1}, מעלה $y(u_{n+1})$ ל-ε, ואז S_n מתהדקת ומצטרפת לכיסוי. יחס הקירוב:

$$\frac{n+\varepsilon}{1+\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} n = f.$$

טענה: בתחילת כל ריצה של הלולאה מתקיים:

① y הוא פתרון דואלי פיזיבילי.

② x ו-y מקיימים תנאי רפיון משלימה (1,f) מורחבים.

טענה: האלג' לא רץ לעד.

מסקנה: בסוף האלג', x הוא f-קירוב.

עד כמה הניתוח הזה מדויק?

Sequential and Parallel Algorithms for Mixed Packing and Covering (FOCS - 2001)
Neal E. Young

http://www.cs.ucr.edu/~neal/non_arxiv/FOCS_2001_538.pdf

קלט: מטריצות P, C ; וקטורים p, c — שכל רכיביהם אי-שליליים ; $0 < \varepsilon$

פלט: x המקיים: $Px \le (1+\varepsilon)p$ & $Cx \ge c$

או הוכחה שלא קיים x עבורו $Cx \ge c$ & $Px \le p$.

בהמשך נסביר מדוע פתרון הבעיה הנ"ל מאפשר פתרון בעיות כיסוי, אריזה ובעיות מעורבות.

קירובים גזירים לפונק' $\min$, $\max$

$$\mathrm{lmax}\, y \triangleq \ln \sum_i e^{y_i}$$

$$\mathrm{lmin}\, y \triangleq -\ln \sum_i e^{-y_i}$$

תכונות:

1) $\mathrm{lmax}\, y \ge \max_i y_i$

2) $\mathrm{lmin}\, y \le \min_i y_i$

3) $\dfrac{\partial\, \mathrm{lmax}\, y}{\partial y_j} = \dfrac{e^{y_j}}{\sum_i e^{y_i}}$

4) $\dfrac{\partial\, \mathrm{lmin}\, y}{\partial y_j} = + \dfrac{e^{-y_j}}{\sum_i e^{-y_i}}$

5) אם M מטריצה אז:

$$\frac{\partial\, \mathrm{lmax}(Mx)}{\partial x_j} = \frac{1}{\sum_i e^{(Mx)_i}} \cdot \sum_i \frac{\partial e^{(Mx)_i}}{\partial x_j}$$

$$= \frac{1}{\sum_i e^{(Mx)_i}} \cdot \sum_i e^{(Mx)_i} \cdot \frac{\partial (Mx)_i}{\partial x_j}$$

$$= \frac{\sum_i e^{(Mx)_i} \cdot M_{ij}}{\sum_i e^{(Mx)_i}}$$

לכן: $\sum_i \alpha_i \dfrac{\partial}{\partial x_i} \mathrm{lmax}(Mx) = \sum_i (M\alpha)_i \dfrac{e^{(Mx)_i}}{\sum_j e^{(Mx)_j}}$