Note Title 10/25/2006

אלגוריתמים ברשתות - 26.10.06

זרימה מקסימום ברשתות

רשת זרימה $N=\langle G,s,t,c\rangle$

- גרף מכוון $G=(V,E)$
- מקור $s\in V$ ובור $t\in V$
- קיבולים $c:E\to\mathbb{R}^{\geq 0}$

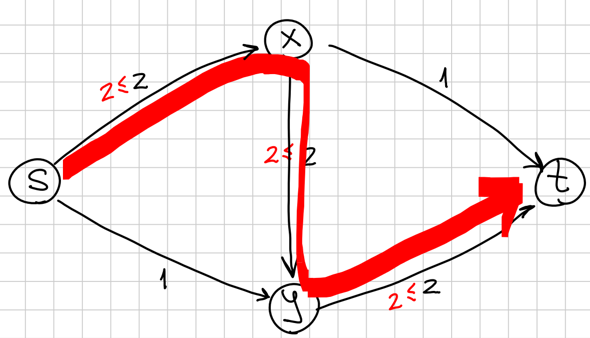
זרימה סטנדרטית: $f:E\to\mathbb{R}^{\geq 0}$ המקיימת

[אילוצי קיבול] $\forall e\in E:\quad 0\le f(e)\le c(e)$

[אילוצי שימור זרימה] $\forall v\in V\setminus\{s,t\}:\quad \sum_{e\in IN(v)} f(e)=\sum_{e\in out(v)} f(e)$

כמות הזרימה $|f|$: $|f|\triangleq\sum_{e\in out(s)} f(e)-\sum_{e\in IN(s)} f(e)$

דוגמא



הגדרה בעזרת זרימת מסלולים:

$P\triangleq$ קב' כל המסלולים המכוונים (והפשוטים) מהמקור s לבור t.

זרימה: $f:P\to\mathbb{R}^{\geq 0}$ המקיימת

[אילוץ קיבול] $\forall e\in E:\quad \sum_{\{p\in P\mid e\in p\}} f(p)\le c(e)$

הערות: (1) אין צורך באילוצי שימור זרימה.

(2) מספר המשתנים עלול להיות אקספ'.

(3) נדרשת הוכחה לשקילות...

הגדרה שלישית (Sleator)

1) נרחיב את פונק' הקיבולים לכל זוגות הצמתים $c: V\times V \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ כאשר $c(v,w)=0$ אם $(v,w)\notin E$.

2) זרימה היא פונקציה $f: V\times V \to \mathbb{R}$ המקיימת:

א) $\forall (v,w)\in V\times V: \; f(v,w) \le c(v,w)$: [illegible]

ב) $\forall (v,w)\in V\times V: \; f(v,w) = -f(w,v)$: [illegible]

ג) $\forall v\in V\setminus\{s,t\}: \; \sum_{u\in V} f(u,v)=0$: [illegible]

כמות הזרימה $|f| \triangleq \sum_{v\in V} f(s,v)$.

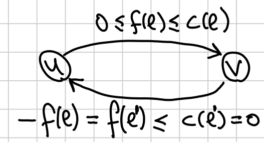
מוצר ?

א) $\forall (v,w)\in V\times V: \; f(v,w) \le c(v,w)$: [illegible]

ב) $\forall (v,w)\in V\times V: \; f(v,w) = -f(w,v)$: [illegible]

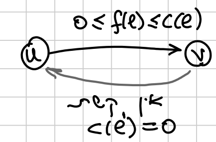
ג) $\forall v\in V\setminus\{s,t\}: \; \sum_{u\in V} f(u,v)=0$: [illegible]

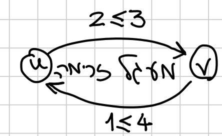
Sleator



לא יתכנו מעגלי זרימה באורך 2

קורמן





שיעורי בית: (שקילות של הגדרות)

הראו כיצד ניתן לתרגם כל זרימה סטנדרטית לזרימה לפי Sleator, ולהיפך.

מושגים

קשת רוויה: אם $f(e) = c(e)$

כמות זרימה: $|f| = \sum_{v\in V} f(s,v)$

זרימה מקסימום:

f זרימה מקסימום אם לכל זרימה f' מתקיים: $|f| \ge |f'|$.

זרימה מקסימלית:

f זרימה מקסימלית אם בכל מסלול מכוון מהמקור s לבור t יש קשת רוויה.

מושגים - המשך

חתך: אם $S \subsetneq V$ מקיים $s \in S$ וגם $t \notin S$ אז החתך המושרה ע"י S הוא

$$\delta(S) \triangleq \{(v,w)\in V^2 \mid v\in S \;\&\; w\notin S\}$$

קיבול חתך: $c(S) \triangleq \sum_{(v,w)\in\delta(S)} c(v,w)$

כמות זרימה בקב' קשתות: אם $F \subseteq E$ אז $f(F) \triangleq \sum_{e\in F} f(e)$.

זרימה נטו בחתך: $f(\delta(S))$.

תכונות קלות

1. האם: f זרימה מקסימלית $\Leftarrow$ f זרימה מקסימום?
2. $|f| = f(\delta(\{s\}))$
3. לכל 2 חתכים S_1,S_2: $f(\delta(S_1)) = f(\delta(S_2))$
   ובפרט: $f(\delta(S_1)) = |f|$
4. לכל חתך S: $f(\delta(S)) \le c(S)$
   מתי יש שוויון?
5. במילים אחרות: מה אומר 4?

עוד תכונות קלות

6. **מעגל זרימה:** מסלול מעגלי ב-G שבכל קשת לאורכו יש זרימה חיובית.
7. ניתן להיפטר ממעגלי זרימה: אם ב-N יש זרימה $f:E\to\mathbb{R}^{\ge 0}$, אז קיימת זרימה $g:E\to\mathbb{R}^{\ge 0}$ המקיימת:
   (א) $|g| = |f|$
   וגם (ב) g אינה מכילה מעגל זרימה.
8. אם $f,g,f+g$ זרימות ב N אז
   $|f+g| = |f| + |g|$

ועוד תכונות קלות

9. אם f זרימה חוקית וגם $|f|>0$ אז קיים מסלול p מהמקור s לבור t המקיים:
   $\forall e\in p:\quad f(e)>0$

פירוק זרימה למסלולי זרימה

תהי N רשת זרימה.

המקרה השלם:

קיימת זרימה סטנדרטית $f: E \to \mathbb{N}$ המקיימת $|f|=K$

אם״ם ניתן לארוז K מסלולי s-t ברשת N.

המקרה השבור:

קיימת זרימה סטנדרטית $f: E \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ המקיימת $|f|=x$

אם״ם קיימת אריזה שבורה בגודל x של לכל

היותר $|E|$ מסלולי s-t ברשת N.

הרשת השיורית

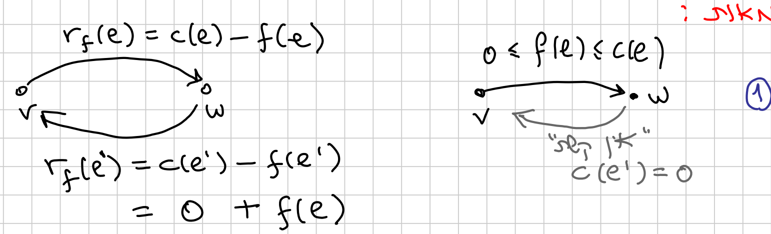
תהי f זרימה ברשת N. הרשת השיורית N_f היא

רשת מעל אותם הצמתים, עם אותו מקור ובור.

פונקצית הקיבולים ברשת השיורית:

$$r_f(v,w) \triangleq c(v,w) - f(v,w)$$

דוגמאות:



טענה: אם f זרימה ב N וכן g זרימה ב N_f,

אזי f+g זרימה ב-N ומתקיים

$$|f+g| = |f| + |g|$$

מסקנה: אם קיימת זרימה g ב N_f עבורה $|g|>0$,

אזי f אינה זרימה מקסימום.

טענה: זרימת האפס היא זרימה מקסימום ב-N

אם״ם לא קיים מסלול p מהמקור s לבור t

שמקיים $\forall e \in p: c(e) > 0$.

טענה: זרימת האפס היא זרימה מקסימום ב-N

אם״ם לא קיים מסלול p מהמקור s לבור t

שמקיים $\forall e \in p: c(e) > 0$.

הוכחה: $(\Leftarrow)$ קל.

$(\Rightarrow)$ נבנה חתך S ונראה $c(S)=0$.

מובן $\forall f: \quad |f| \leq c(S)$.

ולכן זרימת אפס היא מקסימום.

כעת מוכנים להוכיח 2 תוצאות מרכזיות:

$\begin{cases} \text{min-cut max-flow Theorem} \\ \text{Ford \& Fulkerson algorithm} \end{cases}$

אלגוריתם למציאת זרימה מקסימום (Ford & Fulkerson)

$f = 0$

כל עוד קיים מסלול הרחבה p:

תהי f_p זרימה מקסימלית ב N_f לאורך p

עדכן: $f \leftarrow f + f_p$

החזר את f.

מסלול הרחבה: מסלול ב N_f מהמקור לבור שלכל קשתותיו יש קיבול חיובי.

משפט: חתך מינ' זרימה מקס'

אם ב-N קיימת זרימה מקסימום אזי:

$$\max\{|f| : f \text{ זרימה ב} N\} = \min\{c(S) : S \text{ חתך}\}$$

הוכחה: כבר הוכחנו $\forall f, S: |f| \le c(S)$.

לכן מעוניינים למצוא שיוויון. תהי f זרימה מקסימום.

משמע ב-N_f, זרימת האפס היא זרימה מקסימום.

יהי S חתך ב N_f המקיים $r_f(S) = 0$.

נותר להראות:

$\forall (v,w) \in \delta(S): f(v,w) = c(v,w)$ □

סיבוכיות של Ford & Fulkerson

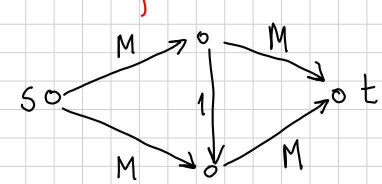
נניח שכל הקיבולים שלמים.

בכל מסלול הרחבה, צוואר הבקבוק הוא לפחות 1.

לכן מספר האיטרציות $\le |f|$

ולכן הסיבוכיות היא $O((m+n)\cdot|f|)$.

למה איננו מרוצים מזמן הריצה?



נכונות של Ford & Fulkerson

נניח קיבולים שלמים.

כיון ש $c(\{s\}) < \infty$, קיימת זרימה מקסימום, שגודלה M.

בכל איטרציה מגדיל את הזרימה בלפחות 1.

לפיכך האלג' עוצר כעבור M איטרציות לכל היותר.

כשהאלגוריתם עוצר: אין מסלול הרחבה $\Longleftarrow$ הזרימה המחושבת היא מקסימום.