Note Title 10/25/2006

אלגוריתמים ברשתות - 28.10.06

- זרימה מקסימום ברשתות

משפט $\max flow = \min cut$

אלג' Ford & Fulkerson

סקירה של אלגוריתמים (Dinitz, Edmonds & Karp)

- שימושים של זרימה מקסימום

שידוך מקסימום בגרף דו-צדדי

כיסוי צמתים בגרף דו צדדי

- מבוא לאלגוריתם push-relabel של Goldberg & Tarjan

טענה: זרימת האפס היא זרימה מקסימום ב-N אמ"מ לא קיים מסלול p מהמקור s לבור t שמקיים $\forall e\in p:\ c(e)>0$.

הוכחה: ($\Leftarrow$) קל.

($\Rightarrow$) נבנה חתך S ונראה $c(S)=0$.

מובן $\forall f:\ |f| \le c(S)$.

ולכן זרימת אפס היא מקסימום.

כעת מוכנים להוכיח 2 תוצאות מרכזיות:

- min-cut max-flow Theorem
- Ford & Fulkerson algorithm

משפט: חתך מינ' = זרימה מקס'

אם ב-N קיימת זרימה מקסימום אזי:

$$\max\{|f| : f \text{ זרימה ב-} N\} = \mathrm{MIN}\{c(S) : S \text{ חתך}\}$$

הוכחה: כבר הוכחנו $\forall f, S:\ |f| \le c(S)$.

לכן מספיק למצוא שוויון. תהי f זרימה מקסימום.

משמע: ב-N_f, זרימת האפס היא זרימה מקסימום.

יהי S חתך ב-N_f המקיים $r_f(S)=0$.

נותר להראות:

$$\forall (v,w)\in\delta(S):\ f(v,w)=c(v,w)$$

וכעת $|f|=c(S)$ ע"י חיבור כל השוויונות. □

אלגוריתם למציאת זרימה מקסימום (Ford & Fulkerson)

$f=0$

כל עוד קיים מסלול הרחבה p:

- תהי f_p זרימה מקסימלית ב-N_f לאורך p
- עדכן: $f \leftarrow f + f_p$

החזר את f.

מסלול הרחבה: מסלול ב-N_f מהמקור לבור שלכל קשתותיו קיבול חיובי.

סיבוכיות של Ford & Fulkerson

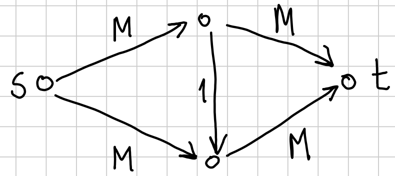
נניח שכל הקיבולים שלמים.

בכל מסלול הרחבה, צוואר הבקבוק הוא לפחות 1.

לכן מספר האיטרציות $\leq |f|$

ולכן הסיבוכיות היא $O((m+n)\cdot|f|)$.

למה איננו מרוצים מזמן הריצה?



נכונות של Ford & Fulkerson

נניח קיבולים שלמים.

כיון ש $C(\{s\}) < \infty$, קיימת זרימה מקסימום, שגודלה M.

בכל איטרציה מגדילים את הזרימה בלפחות 1.

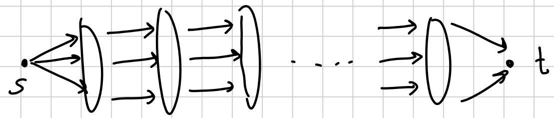
לפיכך האלג' נעצר כעבור M איטרציות לכל היותר.

כשהאלגוריתם נעצר: אין מסלול הרחבה $\Leftarrow$ הזרימה המחושבת היא מקסימום.

מה קורה אם הקיבולים אינם שלמים? $(?\ \mathbb{R}, \mathbb{Q})$

אלגוריתמים לזרימה מקסימום המבוססים על מסלולי שיפור

1) מסלולי שיפור קצרים: בכל איטרציה מצא זרימה מקסימלית שאוכלסת מסלולים קצרים ביותר בגרף השיורי.



* גרף שכבות בגרף השיורי.
* כל הקשתות בעלות קיבול $r_f(e) > 0$.
* כל המסלולים מהמקור לבור הם קצרים ביותר.

הרעיון הוצג וניתח ע"י דיניץ.

אלגוריתמים לזרימה מקסימום המבוססים על מסלולי שיפור

1) מסלולי שיפור קצרים: בכל איטרציה מצא מסלול הרחבה קצר ביותר.

Edmonds & Karp: 1972 הראו שהפעלת הכלל הזה מביאה $O(n\cdot m)$ איטרציות לכל היותר.

כל איטרציה מתממשת בזמן $O(m)$, ולכן זמן הריצה הכולל הוא $O(n\cdot m^2)$. כיון ש $m=O(n^2)$ נקבל זמן ריצה $O(n^5)$.

שימושים בזרימה מקסימום

שידוך מקסימום בגרף דו צדדי

מושגים:

גרף דו-צדדי: $G=(V,E)$ הוא גרף דו צדדי אם ניתן לחלק את V ל-2 קבוצות זרות $V=A\cup B$ כך שכל הקשתות מקיימות $E\subseteq A\times B$.

שידוך: $F\subseteq E$ היא שידוך אם כל צומת נוגעת על קשת אחת לכל היותר של F.

שידוך מקסימום: $F\subseteq E$ היא שידוך מקסימום אם לכל שידוך $F'\subseteq E$ מתקיים $|F'|\le|F|$.

אלגוריתמים לזרימה מקסימום המבוססים על מסלולי שיפור

Dinitz 1970: הוכיח שמס' האיטרציות חסום ע"י n (כי מספר השכבות עולה מאיטרציה לאיטרציה).

בכל איטרציה:

- בונה גרף שכבות (BFS בזמן $O(m)$).
- מחשב זרימה מקסימלית (בזמן $O(m\cdot n)$).

לכן זמן ריצה $O(m\cdot n^2)=O(n^4)$.

אנחנו נלמד אלג' שאינו מבוסס על מסלולי שיפור בעל סיבוכיות $O(n^3)$ ובעל תכונות מעניינות אחרות.

עוד שימוש: כיסוי בצמתים בגרף דו צדדי

כיסוי בצמתים: $U\subseteq V$ הוא כיסוי בצמתים של קשתות הגרף $G=(V,E)$ אם לכל $(v,w)\in E$ מתקיים $U\cap\{v,w\}\neq\emptyset$.

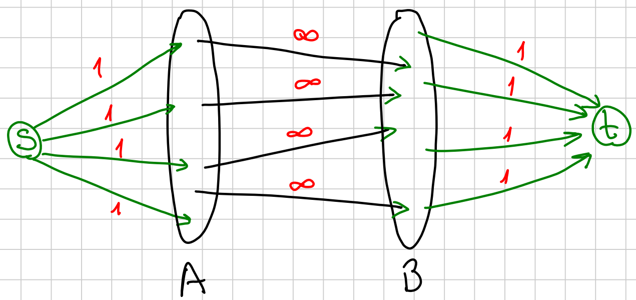
משפט König: בכל גרף דו צדדי גודל שידוך מקסימום שווה לגודל כיסוי קטן ביותר בצמתים.

הוכחה: נסמן M^* - שידוך מקסימום.
C^* - כיסוי מינימום בצמתים.

צ"ל $|M^*|=|C^*|$.

טענה: ניתן לחשב שידוך מקסימום בגרף דו צדדי ע"י פתרון של בע"ז זרימה מקסימום.

הוכחה:



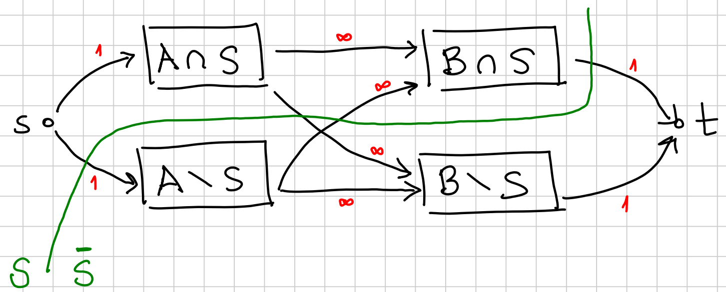
התאמה חח"ע:

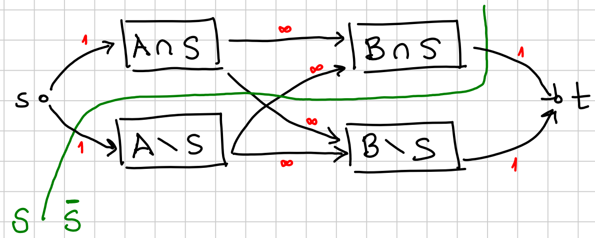
זרימות בשלמים $\longleftrightarrow$ שידוכים

מקיימת כמות זרימה = גודל השידוך. □

הכיוון הקל: $|C^*| \geq |M^*|$.

הכיוון הקשה: $|C^*| \leq |M^*|$. התאמנו לגרף רשת זרימה שבה הזרימה המקסימום f^* מקיימת $|f^*| = |M^*|$.
נפעיל על MinCut (חתך מינ' = זרימה מקס') למציאת חתך S שמקיים $c(S) = |f^*|$:





החתך $\delta(S)$ מכיל 3 סוגי קשתות:

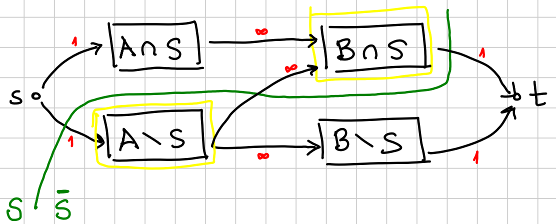
(1) קשתות $s \to a$ עבור $a \in A \setminus S$. קיבול 1

(2) קשתות $b \to t$ עבור $b \in B \cap S$ קיבול 1

(3) קשתות $a \to b$ עבור $a \in A \cap S$, $b \in B \setminus S$. קיבול ∞

$c(S) < \infty$, ולכן אין קשתות מסוג (3).

$\Leftarrow \quad |M^*| = |f^*| = c(S) = |A \setminus S| + |B \cap S|$



$\Leftarrow \quad |M^*| = |f^*| = c(S) = |A \setminus S| + |B \cap S|$

אבל $U = (A \setminus S) \cup (B \cap S)$ הוא כיסוי בצמתים!

ולכן $|M^*| = |U| \geq |C^*|$, כנדרש.

הערות: ① ההוכחה גם מספקת אלג' למציאת C^*.
② מקרה נוסף של דואליות!

מבוא לאלגוריתם של Goldberg & Tarjan

מושגים:

עודף זרימה שנכנס לצומת v (excess flow).

$$e(v) \triangleq \sum_{u \in V} f(u,v)$$

(בזרימה חוקית, $e(v) = 0$, לכל $v \in V \setminus \{s,t\}$.)

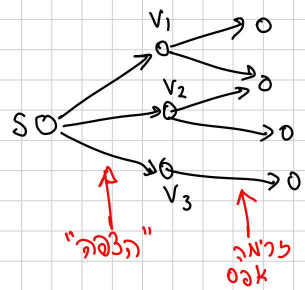
קדם זרימה (preflow): $f: V \times V \to \mathbb{R}$

מקיימת: אילוצי קיבול, אנטי-סימטריות, ועודף זרימה אי-שלילי:
$\forall v \in V \setminus \{s\} : \quad e(v) \geq 0$

קדם זרימה $\forall v \neq s: \quad e(v) \triangleq \sum_{u \in V} f(u,v) \geq 0$

דוגמא:

$$f(u,v) = \begin{cases} c(u,v) & \text{if } u=s \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



נשים לב: קדם-הזרימה מרוויה את כל קשתות $\delta(\{s\})$.

קשת שיורית: זוג מתאים (v,w) המקיים $r_f(v,w) > 0$.

תוויות חוקיות

נתונה רשת N, f קדם זרימה, ורשת שיורית N_f.

פונקציה $d: V \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ נקראת פונקצית תוויות אם:

1. $d(s) = n$ (s הוא המקור)
2. $d(t) = 0$ (t הוא הבור)
3. $\forall v,w \in V: \quad r_f(v,w) > 0 \Rightarrow d(v) \leq d(w) + 1$

תנאי 3 מונע "מסלולים קצרים" מ-s ל-t.

עקרונות

שמירה: האלגוריתם מתחזק קדם זרימה אשר תמיד מרוויה חתך כלשהו בגרף.

האלג' מנסה "לתקן" את קדם-הזרימה כדי שתהפוך לזרימה חוקית (תקיים גם את אילוצי שימור הזרימה).

אם הזרימה חוקית, אז היא מקסימום (כי יש חתך רווי).

2 סוגי תיקונים:

(1) המשך הזרמה לכוון הבור (אופטימי)

(2) החזר זרימה למקור (פסימי).

תוויות: $\left[\, d(v) \le d(w)+1,\ d(t)=0,\ d(s)=n \,\right]$

סימון: $d_{N_f}(v,w) \triangleq$ המרחק בין v ל w בגרף המושרה ע"י הקשתות השיוריות.

טענה 1: (1) $\forall v: \quad d(v) \le d_{N_f}(v,t)$

(2) $\forall v \quad d_{N_f}(v,s) \ge n - d(v)$

(3) $\forall v \quad d(v) \ge n \Rightarrow d_{N_f}(v,t) = \infty$

טענה 2: אם f קדם זרימה ו-d פונקציית תוויות חוקית, אזי קיים חתך רווי ביחס ל-f.

דוגמא:

אם f היא קדם-זרימה שמציפה את $\delta(\{s\})$, נגדיר $d(v) = \begin{cases} n & \text{if } v=s \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$.

נשים לב שלכל w: $r_f(s,w)=0$, ולכן d היא פונקציית תוויות חוקית.

תוויות - הוכחת טענה 1:

① נסתכל במסלול קצר ביותר מ-v ל-t ב-N_f

$$v=v_0 \to v_1 \to \cdots \to v_{k-1} \to v_k=t$$

כמובן, $d(t)=0$, ולכן

$d(v_{k-1}) \le 1$

$d(v_{k-2}) \le 2$

$\vdots$

$d(v_0) \le k$

② נסתכל במסלול קצר ביותר מ-s ל-v:

$$d(s)=n \quad s=v_0 \to v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_{k-1} \to v_k=v$$

$d(v_i) \le 1 + d(v_{i+1}) \Longrightarrow \quad n \le k + d(v_k)$