2/11/06 — אלגוריתמים ברשתות

Note Title — 11/1/2006

אלגוריתם push-relabel
למציאת זרימה מקסימום
של Goldberg & Tarjan

"A new approach to the maximum-flow problem", JACM, 33:4, Oct. 1988

צומת אקטיבי

$$\left.\begin{array}{l} v \in V \setminus \{s,t\} \\ e(v) > 0 \\ d(v) < \infty \end{array}\right\}$$

איתחול

① קדם זרימה שמציפה את $\delta(\{s\})$.

② פונקצית תווית פשוטה:

$d(s) = n \quad , \quad \forall v \neq s : \ d(v) = 0$

---

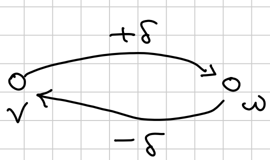
push (v, w)

applicability : v active, $r_f(v,w) > 0$, $d(v) = 1 + d(w)$

action : $\delta \triangleq \min\{ e(v), r_f(v,w) \}$

$f(v,w) \leftarrow f(v,w) + \delta \ ; \ f(w,v) = f(w,v) - \delta$

$e(v) \leftarrow e(v) - \delta \ ; \ e(w) \leftarrow e(w) + \delta$



---

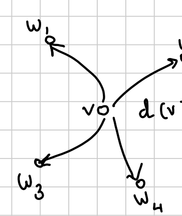
relabel (v)

applicability : v active and

$\forall w : r_f(v,w) > 0 \Longrightarrow d(v) \leq d(w)$

action : $d(v) \leftarrow 1 + \min\{ d(w) \mid r_f(v,w) > 0 \}$

הערה: $\infty = \min \emptyset$



$d(v) \leftarrow 1 + \min\{ d(w_1), d(w_2), d(w_3), d(w_4) \}$

זוהי התווית הגבוהה ביותר ש-v יכול לקבל!

האלגוריתם

① איתחול: f מציפה $\delta(\{s\})$, d פונק' תוית פשוטה.

② כל עוד קיימת פעולת דחיפה או עדכון תוית שניתן לבצע:
בצע את הפעולה.

③ החזר את f.

שמורה
f היא קדם זרימה
d היא פונק' תוית חוקית ביחס ל-f

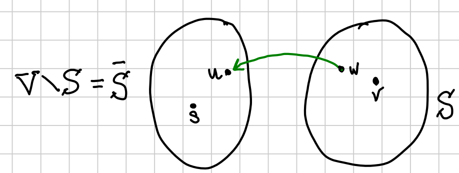
דחיפה מרווה: פעולת דחיפה $push(v,w)$ היא מרווה, אם אם אחריה $r_f(v,w)=0$.

הערות:

① אם f קדם זרימה, d פונק' תוית חוקית ביחס ל-f, ו-v צומת פעיל אזי שניתן לדחוף זרימה מ-v לצומת אחר ($push(v,w)$), או שניתן לעדכן את $d(v)$ (כלומר $relabel(v)$).

למה 3.5 אם f קדם זרימה וכן $e(v)>0$ אזי $dist_{N_f}(v,s)<\infty$.

הוכחה נסמן $S \triangleq \{w \mid dist_{N_f}(v,w)<\infty\}$.
ונניח בשלילה ש-$s \notin S$.



$w \in S \;\&\; u \notin S$
$\Downarrow$
$r_f(w,u)=0$
$\Downarrow$
$f(u,w) \le 0$ ⊛

$\forall w \neq s: e(w) \geq 0$

$$0 \le \sum_{w\in S} e(w) = \sum_{w\in S}\sum_{u\in V} f(u,w)$$

$$\text{(אנטי-סימטריות)} = \sum_{w\in S}\sum_{u\notin S} f(u,w) \overset{⊛}{\le} 0$$

ולכן $\forall w\in S: e(w)=0$, ובפרט עבור $v\in S$, וסתירה. □

אם האלג' עוצר, ובעצירתו $\forall v: d(v)<\infty$, אזי מובטח לנו:

① f היא זרימה חוקית.

② אין מסלול שיפור ב-N_f מ-s ל-t.

ולכן f היא זרימה מקסימום.

מכאן, שכדי להוכיח נכונות מספיק להראות:

① האלג' עוצר.

② בעצירתו, כל התויות סופיות.

הערות

① הגובה של כל צומת אינו יורד במהלך האלג'.
בפרט, הפעולה relabel(v) מגדילה את $d(v)$.

② במהלך ריצת האלג': $d(v) \le 2n-1$.
הוכחה: ראינו $dist_{N_f}(v,s) \le d(v) - n$.
נסתכל על ההצבה האחרונה של $d(v)$ ע"י פעולת relabel. בעת ההצבה התקיים $e(v)>0$ ולכן $dist_{N_f}(v,s)<\infty$, ולכן $dist_{N_f}(v,s)\le n-1$. □

מסקנה: לכל v, מספר פעולות relabel $\le 2n-1$.
סה"כ מס' פעולות relabel $\le (n-2)(2n-1) < 2n^2$.

למה 3.9 מספר פעולות הדחיפה המרוות $\le 2\cdot n\cdot m$

הוכחה: קבע זוג צמתים v w. נוכיח שמס' הדחיפות המרוות מסוג push(v,w) או push(w,v) חסום ע"י $2n-1$.

זמן
t_3 — push(v,w)
t_2 — push(w,v)
t_1 — push(v,w) (מרווה)

נשים לב שבין כל 2 פעולות push(v,w) רוויות, חייבת להיות פעולת push(w,v).

נסמן ב- $t_1, t_2, \dots, t_k$ את סדרת הזמנים שבהם התקיימו דחיפות מרוות push(v,w) או push(w,v).

נסמן $d_{t_i}(v)$ - הערך של $d(v)$ בזמן t_i.

וחייב להתקיים

$$d_{t_1}(v) = 1 + d_{t_1}(w)$$
$$d_{t_2}(w) = 1 + d_{t_2}(v) \ge 1 + d_{t_1}(v) = 2 + d_{t_1}(w)$$

נקבל $d_{t_{i+1}}(v) + d_{t_{i+1}}(w) \ge 2 + d_{t_i}(v) + d_{t_i}(w)$,

ולכן $d_{t_k}(v) + d_{t_k}(w) \ge (k-1)\times 2 + d_{t_0}(v) + d_{t_0}(w)$.

בדחיפה המרווה הראשונה: $d_{t_0}(v) + d_{t_0}(w) = 1$.

בדחיפה המרווה האחרונה: $d_{t_k}(v) + d_{t_k}(w) \le (2n-1)\times 2 - 1$.

ולכן $4n-3 \ge 2k-2+1$

$\Leftarrow$ $2n-1 \ge k$.

$(v,w)\in E$ או $(w,v)\in E$ גורר שמס' דחיפות מרוות $\le 2nm$. □

נקודות להבהרה:

① איפה טיעון בהוכחת למה 3.9 מגביל את החסם לדחיפות מרוות?

② איך נחסום דחיפות לא מרוות?

$v \xrightarrow{r_f(v,w)} w$ $\quad (v)$

$e(v) < r_f(v,w)$

דחיפה לא מרווה היא טובה כי מזרימה זרימה ב"מורד" והופכת צמתים "גבוהים" ללא פעילים.

זרימות מרוות "מקלקלות" תכונה זו, אבל אין ברירה.

למה 3.10 מס' פעולות הדחיפה הלא מרוויות $\le 4n^2m$

הוכחה: נגדיר פונקצית פוטנציאל

$$\phi \triangleq \sum \{ d(v) \mid v \text{ פעיל} \}$$

איך משפיעות הפעולות על ϕ?

דחיפה לא מרווה $push(v,w)$:

$$\phi_{\text{חדש}} \le \phi_{\text{ישן}} - d(v) + d(w)$$

$$\le \phi_{\text{ישן}} - 1$$

לכן, כל דחיפה לא מרווה מורידה את ϕ!

דחיפה מרווה $push(v,w)$:

$$\phi_{\text{חדש}} \le \phi_{\text{ישן}} + d(w)$$

$$\le \phi_{\text{ישן}} + 2n-1$$

מס' דחיפות מרוות $\le 2nm$.

$\Leftarrow$ סה"כ התרומה ל-ϕ בגלל דחיפות מרוות חסום ע"י $2nm \times (2n-1)$.

כל פעולות $relabel(v)$:

$$\phi_{\text{חדש}} \le \phi_{\text{ישן}} + d_{\text{חדש}}(v) - d_{\text{ישן}}(v)$$

$$\le \phi_{\text{ישן}} + 2n-1$$

ולכן סה"כ התרומה ל-ϕ ע"י פעולות $\{relabel(v)\}_{v \in V}$ חסום ע"י $(2n-1)(n-2)$.

סיכום:

פעולות	סה"כ שינוי ב-ϕ
דחיפה לא מרווה	-1
דחיפות מרוות	$+(2n-1) \times 2nm$
פעולות relabel	$+(2n-1)(n-2)$

$$\left.\begin{array}{l} 0 = \phi_{\text{התחלה}} \\ 0 = \phi_{\text{סוף}} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

מס' דחיפות לא מרוות $\le (2n-1) \cdot 2nm + (2n-1)(n-2) \le 4n^2m$

□