אלגוריתמים ברשתות 8/11/06

Note Title 11/8/2006

⊛ זרימה מקס' עם חסמים תחתונים.

⊛ "זרימה מינימום = חתך מקסימום"

זרימה עם חסמים תחתונים

נשתמש בהגדרה הסטנדרטית של זרימה, ונוסיף אילוצים
מהסוג $\forall e : f(e) \ge b(e)$

כעת, זרימת האפס אינה בהכרח מקיימת את
האילוצים החדשים, ויש קושי במציאת זרימה פיזיבילית.

שאלות:

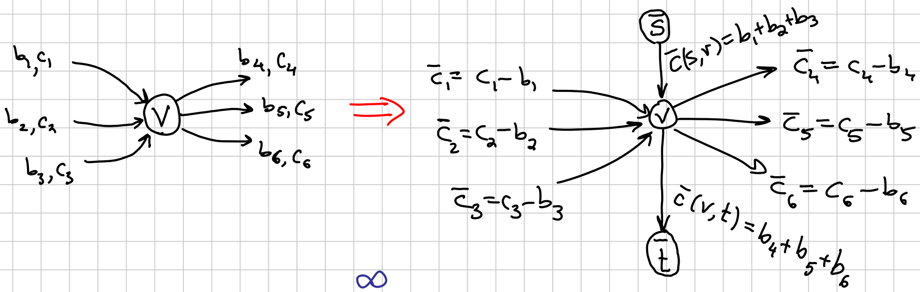
(1) איך מוצאים זרימה פיזיבילית בנוכחות
חסמים תחתונים?

(2) איך מחשבים זרימה מקסימום?

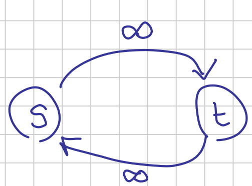
רדוקציה: זרימה פיזיבילית עם חסמים תחתונים < זרימה מקס' רגילה

הוסף מקור $\bar{s}$ ובור $\bar{t}$. חבר כל $v\in V$: $(\bar{s},v)$, $(v,\bar{t})$

הגדר קיבולים $\bar{c}$ ברשת החדשה $\bar{N}$.



ובנוסף



טענה: קיימת זרימה פיזיבילית ב-N אמ"מ קיימת
זרימה מקסימום ב $\bar{N}$ שמרווה את כל הקשתות
היוצאות מ-$\bar{s}$.

הוכחה: הכיוון הקל ($\Rightarrow$) תהי $\bar{f}$ זרימה מקס' ב $\bar{N}$
שמרווה את קשתות $\delta(\{\bar{s}\})$. נגדיר לכל $e\in N$
$f(e) \triangleq \bar{f}(e) + b(e)$.

כמובן $0 \le \bar{f}(e) \le \bar{c}(e) = c(e)-b(e) \Leftarrow b(e) \le f(e) \le c(e)$.

ומה לגבי אילוץ שמירת הזרימה?

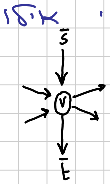
$\bar{f}_{in}(v) = f_{in}(v)$

$\parallel$

$\bar{f}_{out}(v) = f_{out}(v)$

הזרימה שנכנסת מ $\bar{s}$
מוכנסת דרך קשתות $\bar{N}$

וכנ"ל לגבי היוצאת



הכיוון $\Leftarrow$: אם f פיזיבילית ב-N נבנה את הזרימה "ההפוכה"

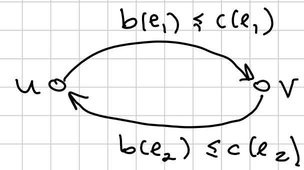
לכל $e\in N$: $\bar f(e) \triangleq f(e)-b(e)$

$$\bar f(\bar s,v) = \sum_{e\in in(v)} b(e) \quad \left(=\bar c(\bar s,v)\right)$$

$$\bar f(v,\bar t) = \sum_{e\in out(v)} b(e)$$

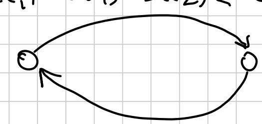
* אילוצי קיבול מתקיימים בכל הקשתות.
* אילוצי שמירת זרימה מתקיימים בכל $v\in V\setminus\{s,t\}$
* "נתקן" את שמירת הזרימה ב-s וב-t באמצעות הקשתות ביניהם (בעלות קיבול ∞).
* קשתות החתך $\delta(\{\bar s\})$ רוויות. (ולכן $\bar f$ זרימה מקס'). □

טענה: בה"כ לכל זוג צמתים (u,v): $\min\{b(u,v),b(v,u)\}=0$.



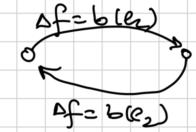
$\Downarrow$

$$\bar b(e_1)\triangleq b(e_1)-b(e_2) \le \bar c(e_1) \triangleq c(e_1)-b(e_2)$$

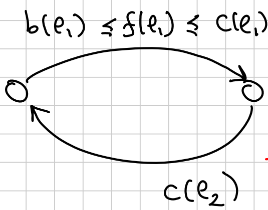


$$\bar b(e_2)=0, \quad \bar c(e_2)\triangleq c(e_2)-b(e_2)$$

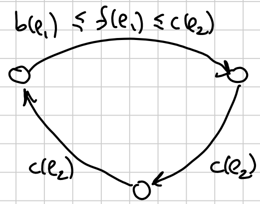
הוכחה: נניח שלא, בה"כ $b(e_1)\ge b(e_2)$. נחסיר $b(e_2)$ מכל הקשתות. נחשב זרימה ברשת החדשה, ואח"כ נוסיף מעגל זרימה



רדוקציה לזרימה אנטי-סימטרית



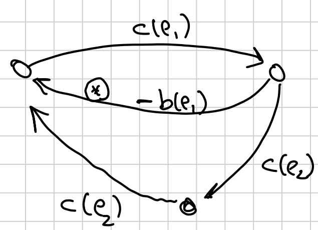
$\Longrightarrow$ נפטר מקשתות אנטי-מקבילות



נפטר מחסמים תחתונים (נשתמש בקיבולים שליליים)

נתנהל בזרימה אנטי-סימטרית

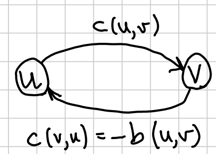
$$\left.\begin{aligned} b(e_1) &\le f(e_1) \\ &\Updownarrow \\ -f(e_1) &\le -b(e_1) \end{aligned}\right\} (*)$$



מציאת זרימה מקסימום עם חסמים תחתונים

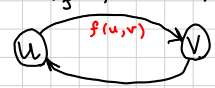
נתנהל בזרימה אנטי-סימטרית:

$$r_f(u,v) \triangleq c(u,v)-f(u,v)$$



$$b(u,v)\le f(u,v)\le c(u,v)$$
$$\Updownarrow$$
$$-f(u,v)\le -b(u,v) \ \& \ f(u,v)\le c(u,v)$$

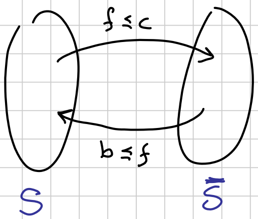
$r_f(u,v)=c(u,v)-f(u,v)$



$$r_f(v,u)=f(u,v)-b(u,v)$$
$$=c(v,u)-f(v,u)$$

לכן הוספת חסמים תחתונים אינה משנה "דבר" למעט קיבולים שליליים.

חתכים בזרימה עם חסמים תחתונים



נגדיר מחדש קיבול של חתך:

$$C(S) \triangleq c(\delta(S)) - b(\delta(\bar{S}))$$

וכעת אם קיימת זרימה מקסימום אז:

$$\max\{\, |f| \;\mid\; f \text{ זרימה עם חסמים תחתונים} \,\} = \min\{\, c(S) \;\mid\; S \text{ חתך},\ s \in S,\ t \notin S \,\}$$

זרימה מינימום עם חסמים תחתונים

רדוקציה פשוטה לזרימה מקסימום: החלפת התפקידים של המקור והבור.

$$\max\{\, |\bar{f}| \;\mid\; \bar{f} \text{ זרימה מ-}t\text{ ל-}s \,\} = -\min\{\, |f| \;\mid\; f \text{ זרימה מ-}s\text{ ל-}t \,\}$$

לפי משפט: זרימה מקס' = חתך מינ': אם $\bar{f}$ זרימה מקס' מ-t ל-s אז קיים חתך $T \subseteq V$, $t \in T$, $s \notin T$ עבורו

$$|\bar{f}|_{t\to s} = c_{t\to s}(T) = c(\delta(T)) - b(\delta(\bar{T})).$$

כמובן $\bar{f}$ היא זרימה מינ' מ-s ל-t

$$|\bar{f}|_{s\to t} = -|\bar{f}|_{t\to s} = b(\delta(\bar{T})) - c(\delta(T))$$
$$= -\min\{\, c(\delta(T)) - b(\delta(\bar{T})) \,\}$$

מסקנה:

$$\min\{\, |f| \;\mid\; f \text{ זרימה מ-}s\text{ ל-}t \,\} = \max_{\{S:\ s\in S,\ t\notin S\}} b(\delta(S)) - c(\delta(S))$$

נגדיר עבור זרימה מינימום:

$$\text{קיבול החתך } S \triangleq b(\delta(S)) - c(\delta(S))$$

ונקבל:

זרימה מינימום = חתך מקסימום.