אלגוריתמים ברשתות - 12/11/06

- מימוש אלג' push-relabel
- השגת זמן ריצה $O(n^3)$
- מבוא מציאת חתך מינימום (גלובלי) בגרף לא מכוון.

מימוש אלגוריתם push-relabel

גרף תשתית: יהי $G=(V,E)$ גרף מכוון. גרף התשתית של G הוא גרף לא מכוון $\tilde{G}=(V,\tilde{E})$ שבו

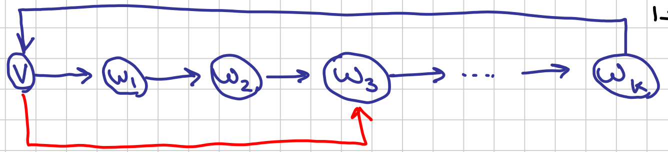
$\{v,w\}\in\tilde{E} \iff v\to w\in E$ או $w\to v\in E$

נקרא ונאמר $\{v,w\}$ קשת לא מכוונת ב G.

לכל קשת לא מכוונת $\{v,w\}$ נחזיק 3 ערכים:

$c(v,w)$, $c(w,v)$, $f(v,w)$ [שווה ל $-f(w,v)$].

לכל צומת v נחזיק רשימת הקשתות הלא מכוונות שמכילות אותו



קשת נוכחית (מוצבעת לדחיפה)

אם v פעיל, בודק האם ניתן לדחוף זרימה לאורך הקשת הנוכחית. אחרת, מקדם את הקשת הנוכחית.
אם מגיע לסוף הרשימה, מעדכן תוית של v, והקשת הנוכחית מצביעה לשכן הראשון w_1.

נדון בתחזוקת קבוצת הצמתים הפעילים בהמשך.

Push/Relabel(v) [v צומת פעיל]

1) יהי $\{v,w\}$ הקשת הנוכחית ברשימה של v.
2) בצע push(v,w) אם ניתן.
אחרת
3) אם w אינו השכן האחרון ברשימה של v, קדם את המצביע של הקשת הנוכחית לשכן הבא.
4) אם w אחרון: עדכן את המצביע של הקשת הנוכחית לשכן הראשון, ובצע relabel(v).

טענה 4.1: בשורה (4) התנאים לביצוע relabel(v) מתקיימים.

הוכחה: רשימת שכני v נסרקת בטרם הגענו לשורה 4.

בכל קידום של המצביע לקשת הנוכחית מ-w_i ל-w_{i+1} מובטח שמתקיים: $r_f(v,w_i)=0$ או $d(v) \le d(w_i)$.

אם relabel(v) לא אפשרי, משמע קיים שכן w_i ש"מפריע". כלומר: $r_f(v,w)>0$ וגם $d(v)>d(w_i)$.

אם $r_f(v,w_i)=0$ בזמן הקידום של המצביע ובגלל $r_f(v,w_i)>0$ בהגעה לשורה 4, משמע שבוצע ביניהם $push(w_i,v)$.
בזמן ה-push מתקיים $d(w_i)>d(v)$. ולכן בשורה (4) עדיין $d(v)<d(w_i)$.

אם $d(v) \le d(w_i)$ בזמן הקידום של המצביע, אזי $d(v)$ נשאר אותו הדבר בשורה (4) כיוון ש $d(w_i)$ לא ירד (ואולי עלה).
מסקנה: w_i אינו יכול להפריע לביצוע relabel(v). ∎

תחזוקת קבוצת הצמתים הפעילים

v פעיל יכול להפסק להיות פעיל רק ע"י push/relabel(v)

Q = קב' הפעילים

בתחילה $Q=\{v\in V\setminus\{s,t\} : c(s,v)>0\}$

בכל פעולת push(v,w): insert(Q,w) (יתכן ש-w כבר פעיל).
ואם הדחיפה לא מרווה אז delete(Q,v).

בכל פעולת push/relabel(v) השינוי ב-Q ממומש ב $O(1)$.

טענה 4.2: זמן הריצה של אלגוריתם push/relabel הוא

$$O(n\cdot m) + C\cdot \#\text{nonsaturating pushes}$$
$$= O(n^2 m)$$

הוכחה: נתמקד בצומת v, ונשאל: כמה פעמים נסרקת הרשימה של v? נשים לב שכל סריקה (למעט האחרונה) מסתיימת ב relabel(v), ולכן מס' הסריקות קטן מ-2n.
אורך הרשימה הוא deg(v), ולכן סה"כ מס' הקידומים של המצביע לקשת הנוכחית (עבור כל הצמתים) חסום ע"י

$$O\left(n \sum_v deg(v)\right) = O(n\cdot m).$$

רק בדחיפה לא מקודם המצביע.
מס' הדחיפות המרוות $= O(nm)$ (נכלל בחישוב למעלה).

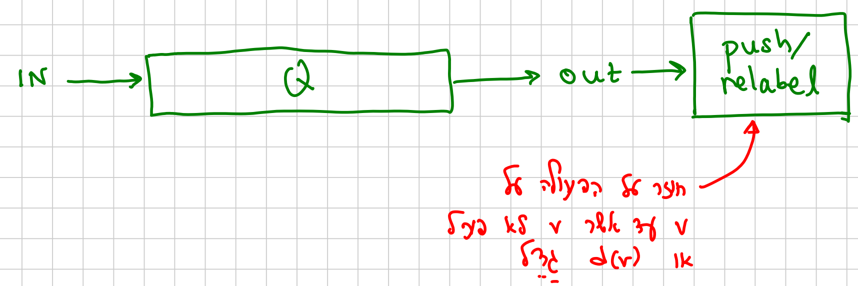
מס' הדחיפות הלא מרוות $= O(n^2m)$.

כל הפעלה של push/relabel עולה $O(1)$, מכאן מש"ל. ∎

שיפור זמן הריצה של האלגוריתם

הרעיון המרכזי: קביעת מדיניות ניהול התור

ניתן להשיג סיבוכיות $O(n^3)$ במספר שיטות.
הבסיסית (והפשוטה) היא FIFO (first-in first-out).



Discharge(Q)

1) $v \leftarrow$ dequeue(Q)

2) repeat

3) push/relabel(v)

4) if w becomes active, then insert(Q, w)

5) until $e(v) = 0$ or $d(v)$ increases.

6) if v active, then insert(Q, v)

השגרה מופעלת כל עוד $Q \neq \emptyset$.
שמורה: כל איברי Q הם צמתים פעילים.

הערה: ניתן להחליף שורה (5) ב until $e(v)=0$

ניתוח האלג' כאשר Q מנוהל בשיטת FIFO

$Q_0 = \{v \in V \setminus \{s,t\} : c(s,v) > 0\}$

PASS 1: סדרת פעולות discharge שמבוצעות כל עוד התור מחזיק ברציפות צמתים שהיו בתור מאז האיתחול.

Q_1: קב' הפעילים בסוף PASS 1.

$v \in Q_1 \Leftrightarrow$ הוכנס לתור במהלך Q_1.

בהינתן Q_i, נגדיר PASS(i+1) כתור סדרת פעולות discharge שמבוצעות החל מסוף PASS i כל עוד התור מכיל ברציפות צמתי Q_i.

טענה: מספר המעברים ע"פ התור $\geq 4n^2$.

הוכחה: נגדיר $\Phi_i \triangleq \max\{d(v) : v \in Q_i\}$.

כיצד מושפעת Φ ממעבר בודד על התור? $Q_{i+1} \gtreqless Q_i$?

אם לא בוצעה פעולת relabel, הרי שמעבר הפרימה בכל צומת פעיל ב Q_i הועבר לצמתים "נמוכים" יותר, ולכן היעדים של כל צמתי Q_{i+1} קטנים מ Φ_i.

$\Leftarrow$ ירידה בערך של Φ. $(\Phi_{i+1} < \Phi_i)$.

ולכן אם $\Phi_{i+1} \geq \Phi_i$, אזי בוצע relabel במהלך PASS(i+1). מס' פעולות relabel חסום ע"י $2n^2$, ולכן מס' מעברים שבהם $\Phi_{i+1} \geq \Phi_i$ גם חסום ע"י $2n^2$.

כעת נחסום את $|\{i \mid \Phi_{i+1} < \Phi_i\}|$.

כמובן $\Delta^+ \triangleq \sum_{\{i : \Phi_{i+1} > \Phi_i\}} (\Phi_{i+1} - \Phi_i) \leq$ מס' פעולות relabel $\leq 2n^2$

מאידך $|\{i : Q_{i+1} < \Phi_i\}| \leq \sum_{\{i : \Phi_{i+1} < \Phi_i\}} (\Phi_i - \Phi_{i+1})$ (Δ^-)

$= \Delta^+ + \Phi_0 - \Phi_{end} \leq 2n^2$

מהו זמן הריצה הכרוך ב-$4n^2$ מעברים ע"פ התור?

בכל הוצאה מהתור מבוצע push/relabel(v). נחלק למקרים:

(1) הצומת v מפסיק להיות פעיל (ולכן יוצא מ-Q_i) ← מתרחש לכל היותר פעם אחת בעת דחיפה לא מרווה. זמן $= O(1)$. סה"כ $O(n)$.

(2) מבוצע relabel(v); נחייב את המעבר הנוכחי. הפעולה עצמה דורשת $O(n)$, וסה"כ $O(n^3)$.

(3) קידום המצביע: מבוצע בזמן $O(1)$. בכל מעבר מס' הקידומים $\leq deg(v) \leq n$. ולכן סה"כ הזמן $O(n^3)$.

(4) דחיפות מרוות: סה"כ $O(n \cdot m)$

מסקנה: זמן הריצה של האלג' כאשר Q מנוהל בשיטת FIFO הוא $O(n^3)$.

שיטות נוספות:

- וריאציות שבהן חוזרים על push/relabel(v) מס' כלשהו של relabels או עד ש-$e(v)=0$.
- בחר צומת ב-Q בעל תווית גבוהה ביותר.
- wave method.

ניתן להפחית את זמן הריצה ל-$O(n \cdot m \lg \frac{n^2}{m})$ ע"י שימוש במבני נתונים מתוחכמים.

חתך מינימום בגרף לא מכוון

הגדרה: גרף (לא מכוון) הוא k-קשיר בקשתות אם:

(1) הגרף נשאר קשיר גם אם מסירים k קשתות.

(2) קיימות k+1 קשתות שהסרתן הופכת את הגרף ללא קשיר.

משפט [Menger]: $G=(V,E)$ הוא k-קשיר אמ"מ ברשת N (לא מכוונת) המתקבלת מ-G ע"י הגדרת $c(e)=1$ לכל קשת מתקיים:

$$K = \min\{ c(S) \mid \emptyset \subsetneq S \subsetneq V \}$$

חתך S המשיג מינ' $c(S)$ נקרא חתך מינימום גלובלי.

כיצד נחשב?

שיטות לחישוב חתך מינימום (גלובלי)

(1) לפי הגדרה: לכל $\emptyset \subsetneq S \subsetneq V$, חשב את $C(S)$.

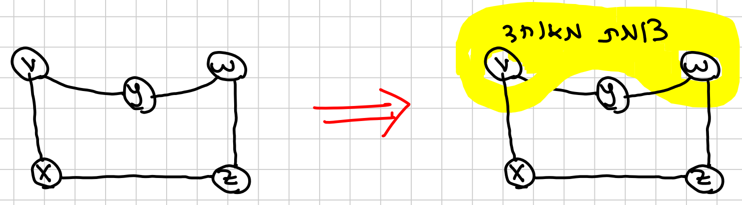
(2) לכל $s,t \in V$ (שונים), חשב חתך מינימום בין s ל-t. זמן ריצה: $\binom{n}{2}=O(n^2)$ חישובי חתך-(s,t) מינימום. $[\,O(n^5)\,]$.

(3) בחר $r \in V$ כלשהו. לכל $v \in V \setminus \{r\}$ חשב חתך מינימום בין r ל-v. זמן ריצה: $(n-1)$ חישובי חתך-(s,t) מינימום. $[\,O(n^4)\,]$

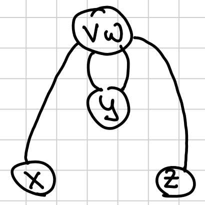
ננסה לשפר...

כיווץ זוג שכנים

פעולת הכיווץ מקבלת גרף לא מכוון $G=(V,E)$ וזוג צמתים $v,w \in V$ (לאו דווקא שכנים).



שקול לגרף:



הערה: פעולת הכיווץ מייצרת גרף עם קשתות מקבילות. ברשת המתאימה הקיבול מציין את מס' הקשתות המקבילות

סימונים

$\lambda(G)$ - קיבול חתך מינימום גלובלי ב- G.

G_{vw} - הגרף המתקבל מכיווץ הזוג $\{v,w\}$ ב- G.

$\lambda(G,v,w)$ - קיבול חתך מינימום ב- G שאינו מפריד בין v ל- w.

$$\lambda(G,v,w) \triangleq \min\{ c(S) \mid \{v,w\} \subseteq S \subsetneq V \}$$

טענה: $\lambda(G,v,w) = \lambda(G_{vw})$

הוכחה: התאמה חח"ע ומשמרת קיבול בין חתכי G שאינם מפרידים בין v ל- w לבין חתכי G_{vw}.

טענה: $\lambda(G) = \min\{\lambda(G_{vw}), \lambda(G,v,w)\}$

אלגוריתם "משופר" לחישוב $\lambda(G)$:

min-cut(G)

  pick $v \neq w \in G$

מחושב ע"י הרצת אלג' לזרימה מקס'

  Return $(\text{MIN}\{\text{min-cut}(G_{vw}), \lambda(G,v,w)\})$

מס' הצמתים בעומק i הוא $n-i$ ולכן זמן הריצה

$$O\left(\sum_{i=0}^{n-1}(n-i)^3\right) = O(n^4)$$

ושיפרנו רק את הקבועים...