16.11.06 אלגוריתמים ברשתות

אלג' למציאת חתך מינימום גלובלי בגרף לא מכוון:

① Nagamochi & Ibaraki - 92 (סידור צמתים)

Stoer & Wagner - 94 (פישוט)

② Karger - 93 (כיווץ אקראי)

נניח $V=\{v_1,\dots,v_n\}$. נסמן $V_i=\{v_1,\dots,v_i\}$.

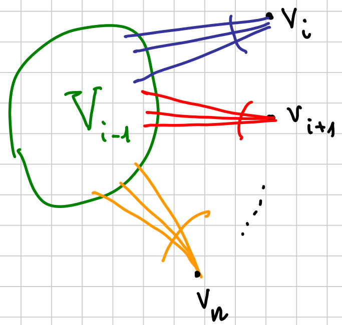
בהינתן פרמוטציה $\pi: V \longrightarrow V$, נסמן $\pi(V_i)=\{\pi(v_1),\dots,\pi(v_n)\}$.

חתך π-אחורה של $\pi(v_i)$ הוא קב' הקשתות בין $\pi(v_i)$ לבין $\pi(V_{i-1})$.

הגדרה: פרמוטציה $\pi: V \to V$ של הצמתים נקראת חוקית אם מתקיים לכל $2 \leq i < j \leq n$:

$$c\left(\text{חתך π-אחורה של } \pi(v_i)\right) \geq c\left(\text{חתך π-אחורה של } \pi(v_j)\right)$$

כדי לפשט, נתעלם מ-π ונניח ש-$\{v_1,\dots,v_n\}$ הוא כבר סידור חוקי.



v_i מחובר הכי "חזק" ל V_{i-1}.

ניתן למצוא סידור חוקי בזמן $O(n^2)$:

בהינתן V_{i-1} נחשב את v_i בזמן $O(n)$.

• גם מימוש "מהיר" יותר (בזמן ששווה לזמן הריצה של האלג' של דייקסטרה למציאת מסלולים קצרים ביותר).

טענה: אם $\{v_1,\dots,v_n\}$ הוא סידור חוקי, אז $\lambda(G, v_n, v_{n-1}) = c(\delta(\{v_n\}))$.

הוכחה בהמשך...

אלג' למציאת חתך מינימום גלובלי

min-cut (G, c) (קריאה ראשונה: min-cut(G,c))

if $|V(G)| = 1$, return(∞)

$\{v_1,\dots,v_n\} \leftarrow$ Legal order of $V(G)$

Return$\left(\text{MIN}\left\{ \delta(\{v_n\}),\ \text{min-cut}(G_{v_{n-1}v_n}, c) \right\}\right)$

סיבוכיות: $T(n) \leq O(n^2) + T(n-1)$

$\Leftarrow$ $T(n) = O(n^3)$ (ריצה בודדת של זרימה מקס')

נכונות האלגוריתם

נכונות נובעת מן הטענה המרכזית $\lambda(G,v_n,v_{n-1}) = c(\delta\{v_n\})$

כיון ש $\lambda(G) = \min\{\lambda(G,v_{n-1},v_n),\ \lambda(G_{v_{n-1}v_n})\}$.

במהלך הוכחת הטענה המרכזית, נעזר בטענות הבאות:

טענה: לכל $p,q,r \in V$ מתקיים

$$\lambda(G,p,q) \le \mathrm{MIN}\{\lambda(G,p,r),\ \lambda(G,q,r)\}$$

טענה: אם G' מתקבל מ-G ע"י השמטת צומת אזי

$$\lambda(G',v,w) \le \lambda(G,v,w)$$

הוכחה $\lambda(G,v_{n-1},v_n) = c(\delta(\{v_n\}))$

הוכחה באינדוקציה על $m+n$ $(|V|+|E|)$.

הבסיס עבור $m+n=2$ ברור.

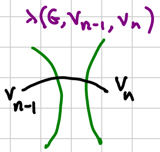
נחלק ל-2 מקרים: (I) $(v_{n-1},v_n)\in E$ (II) $(v_{n-1},v_n)\notin E$.

במקרה (I): יהי G' הגרף המתקבל ע"י השמטת הקשת (v_{n-1},v_n).

$$c(\delta(\{v_n\})) = c(\delta'(\{v_n\})) + c(v_{n-1},v_n)$$

(הנחת האינד') $= \lambda(G',v_{n-1},v_n) + c(v_{n-1},v_n)$

$$= \lambda(G,v_{n-1},v_n)$$



במקרה (II): $c(\delta(\{v_n\})) \ge \lambda(G,v_n,v_{n-1})$

$$\ge \mathrm{MIN}\{\lambda(G,v_n,v_{n-2}),\ \lambda(G,v_{n-1},v_{n-2})\}$$

ולכן מספיק להוכיח ש $c(\delta(\{v_n\}))$ אינו גדול מ-2 הביטויים ב MIN.

יהי G' הגרף המתקבל ע"י השמטת הצומת v_{n-1}.

נשים לב כי $\{v_1,v_2,\dots,v_{n-2},v_n\}$ הוא סידור חוקי של G'.

לפיכך:

$$c(\delta(\{v_n\})) = c(\delta'(\{v_n\}))$$

(הנחת האינד') $= \lambda(G',v_n,v_{n-2})$

$$\le \lambda(G,v_n,v_{n-2})$$

כעת נוכיח $c(\delta(\{v_n\})) \le \lambda(G,v_{n-1},v_{n-2})$.

יהי G'' הגרף המתקבל מ-G ע"י השמטת הצומת v_n.

נשים לב כי $\{v_1,v_2,\dots,v_{n-1}\}$ הוא סידור חוקי של G''.

לפיכך:

$c(\delta(\{v_n\})) \le c(\delta(\{v_{n-1}\}))$ (תכונת הסידור)

$= \lambda(G'',v_{n-1},v_{n-2})$ (הנחת האינד')

$\le \lambda(G,v_{n-1},v_{n-2})$ ∎

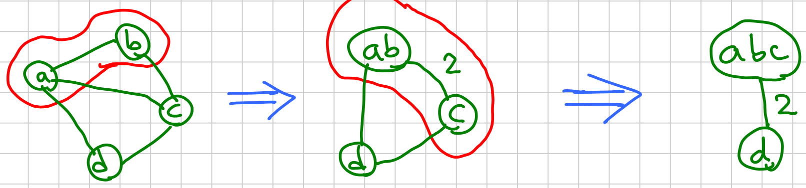
אלגוריתם כיווצים אקראיים למציאת חתך מינימום

Rand-min-cut(G)

If $|V(G)| = 2$ Return$(E(G))$

pick an edge $e \in E(G)$ with prob. $\frac{c(e)}{c(E)}$.

Return(Rand-min-cut(G_e))



הערות:

① אם e כווצה, אזי לא תשתתף בחתך המחושב.

② אינטואיציה: להמנע מקשתות עם קיבול גבוה (כדי להקטין את קיבול החתך). ולכן קשת כבדה מקבלת עדיפות על קשת קלה.

③ לכל חתך $\delta(A)$ $(\emptyset \subsetneq A \subsetneq V)$ יש הסתב' חיובית שהוא יחושב ע"י האלגוריתם.

④ נראה להלן: לכל חתך מינימום $\delta(A)$:

$$Pr(\text{אלג' מחזיר } \delta(A)) \geq \frac{1}{\binom{n}{2}} = \frac{2}{n(n-1)}$$

משפט: אם $\delta(A)$ הוא חתך מינימום, אזי

$$Pr(\text{אלג' מחזיר } \delta(A)) \geq \frac{1}{\binom{n}{2}}$$

הוכחה: נסמן ב- $\{e_1, \dots, e_{n-2}\}$ את סדרת הקשתות שהאלג' בוחר לכווץ.

נסמן ב- $X_i \triangleq$ המאורע $e_i \notin \delta(A)$.

$$Pr(\text{אלג' מחזיר } \delta(A)) = Pr\left(\bigcap_{i=1}^{n-2} X_i\right)$$

$$= Pr(X_1) \cdot Pr(X_2 | X_1) \cdots Pr(X_{n-2} | X_1 \cdots X_{n-3})$$

הגברת סיכוי ההצלחה Amplification

נניח ש $Pr(\text{אלג' מחזיר חתך מינ'}) \geq p = \frac{1}{n^c}$

אם נחזור על האלג' K פעמים, ונבחר את החתך הכי קטן מבין K הריצות, מה ההסתב' למציאת חתך מינימום?

$$Pr\left(\bigcup_{i=1}^{K} \text{אלג' מוצא חתך מינ' בריצה ה-}i\right) = 1 - Pr\left(\bigcap_{i=1}^{K} \text{אלג' נכשל במציאת חתך מינ' בריצה } i\right)$$

$$= 1 - \prod_{i=1}^{K} Pr(\text{אלג' נכשל בריצה } i)$$

$$\geq 1 - (1-p)^K \geq 1 - e^{-pK}$$

עבור $K = \frac{1}{p}$ נקבל $1 - \frac{1}{e}$, עבור $K = \frac{\ln n}{p}$ נקבל $1 - \frac{1}{n}$, עבור $K = \frac{n}{p}$ נקבל $1 - e^{-n}$.

נראה ש $\Pr(X_1) \ge 1-\frac{2}{n}$. (*)

נסמן $k=c(\delta(A))$. לכל v מתקיים $c(\delta(\{v\}))\ge k$

ולכן $c(E)\ge \frac{1}{2}kn$. ולכן

$$\Pr(\overline{X_1}) = \frac{c(\delta(A))}{c(E)} \le \frac{k}{\frac{1}{2}kn} = \frac{2}{n}.$$

(**) נראה ש $\Pr(X_{i+1} \mid X_1\wedge X_2 \wedge\cdots\wedge X_i) \ge 1-\frac{2}{n-i}$

אחרי כיווץ $e_1,\dots,e_i$ תחת המינימום נשאר בקיבול k.

מאידך, מספר הצמתים ירד ל-$(n-i)$ ולכן

$$\Pr(\overline{X_{i+1}} \mid X_1\wedge\cdots\wedge X_i) \le \frac{2}{n-i}.$$

מסקנה:

$$\Pr(\text{אלג' מחזיר } \delta(A)) = \Pr(X_1)\cdot\Pr(X_2\mid X_1)\cdots\Pr(X_{n-2}\mid X_1\cdots X_{n-2})$$

$$\ge \left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n-1}\right)\cdots\left(1-\frac{2}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{\cancel{n-2}}{n}\right)\cdot\left(\frac{\cancel{n-3}}{n-1}\right)\cdot\left(\frac{\cancel{n-4}}{\cancel{n-2}}\right)\cdots\left(\frac{2}{\cancel{4}}\right)\left(\frac{1}{\cancel{3}}\right)$$

$$= \frac{2}{n(n-1)}$$

☒

מסקנה: מס' החתכים השונים בעלי קיבול מינימום חסום ע"י $\binom{n}{2}$.

(מה מספרם בגרף מכוון? האם יש גרף לא מכוון עם $\binom{n}{2}$ חתכי מינימום?)

זמן הריצה:

ריצה בודדת $O(n^2)$.

צריך לפחות n^2 ריצות ⇐ לא יותר יעיל מריצה אחת של זרימה מקס'.

נשים לב $\Pr(X_1)\ge 1-\frac{2}{n}$, ועבור $i<\frac{n}{2}$

$$\Pr(X_{i+1}\mid X_1\cdots X_i) \ge 1-\frac{4}{n}$$

מאידך בסוף הסת' ההצלחה נופלת ל-$\frac{1}{3}$.

Karger & Stein הורידו את זמן הריצה ל-$O(n^2\lg n)$

על בסיס האבחנה הבאה:

① בצע $\frac{n}{2}$ כיווצים כמו קודם.

② בצע 2 ריצות בת"ל על הגרף הנותר, ובחר בטוב מן השניים.

(נעיר כי $\frac{n}{2}$ אינה הבחירה אופטימלית לפיזור).