זרימה במחיר מינימום

$G=(V,E)$ גרף מכוון עם קב' קשתות סימטרית $((x,y)\in E \Rightarrow (y,x)\in E)$

$u:E\to\mathbb{R}$ פונקצית קיבולים (מותר $u(e)<0$).

$c:E\to\mathbb{R}$ פונקצית מחירים אנטי-סימטרית $(c(x,y)=-c(x,y))$

$f:E\to\mathbb{R}$ זרימה מעגלית מקיימת:

① אילוצי קיבול $\forall e:\ f(e)\le u(e)$

② אנטי-סימטרית $f(x,y)=-f(y,x)$

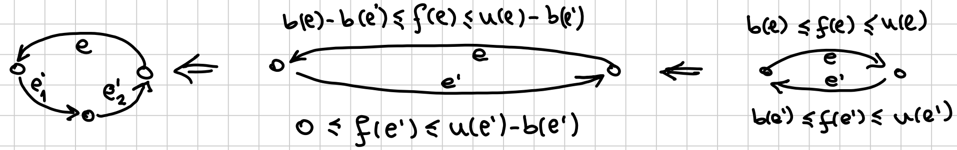
③ חוק שימור $\forall x:\ \sum_y f(x,y)=0$

מחיר זרימה $\triangleq \quad cost(f)=\frac{1}{2}\sum_e c(e)\cdot f(e)$

הערות:

① למה קיבולים שליליים? (דרך לאלץ חסמים תחתונים)

ראינו כבר רדוקציה מהגדרות של זרימה עם חסמים תחתונים לזרימה רגילה:



ואז לכל קשת אין קשת הפוכה.

ועכשיו מוסיפים קשת הפוכה עם קיבול $-b(e)$ ....

② למה מחירים אנטי-סימטריים?

הזרמת יחידת זרימה ב-e עולה $c(e)$.

הזרימה אנטי-סימטרית, ולכן זרימה של יחידה ב-(x,y) גוררת יחידת זרימה בכיוון (y,x):

מחיר הזרימה ב-(x,y) מחיר הזרימה ב-(y,x)

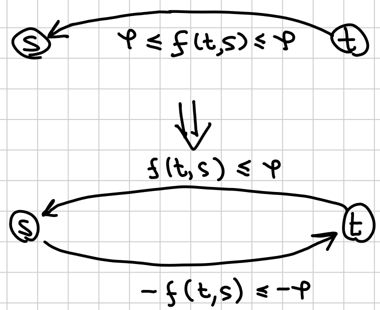
$$c(x,y)\cdot f(x,y)+c(y,x)\cdot f(y,x)=2\cdot f(x,y)\cdot c(x,y)$$

③ למה לחלק את $\sum c(e)f(e)$ ב-2?

④ למה זרימה מעגלית?

מכליל זרימת (s,t) רגילה שבה דורשים $|f|=\varphi$.

רדוקציה:



מכליל את בעיות: transshipment

הגרף השיורי: הקיבולים השליליים לא משנים דבר!

קיבול שיורי: $r_f(e) \triangleq u(e) - f(e)$

(ואין קושי בהגדרה כי E סימטרית)

קשת שיורית: אם $r_f(e) > 0$.

"לינאריות" ממשיכה להתקיים:

f זרימה ב N וגם g זרימה ב N_f אז $f+g$ זרימה ב N.

וכן $cost(f+g) = cost(f) + cost(g)$

פירוק למעגלים זרימה ממשיך להתקיים.

משפט (Klein 67): f זרימה במחיר מינימום אם"ם אין מעגל במחיר שלילי ב N_f.

הוכחה: (⇐) g זרימה במעגל במחיר שלילי ב N_f גוררת:

$$cost(f+g) = cost(f) + cost(g) < cost(f)$$

(⇒) תהי f^* זרימה במחיר מינימום המקיימת $cost(f^*) < cost(f)$.

נטען: (f^*-f) היא זרימה חוקית בגרף השיורי N_f.

אילוצי קיבול:

$$(f^*-f)(e) = f^*(e) - f(e) \le u(e) - f(e) = r_f(e)$$

ובגלל לינאריות (f^*-f) אנטי-סימטרית ומקיימת שימור זרימה.

אבל $cost(f^*-f) < 0 \Rightarrow$ יש ב N_f מעגל שלילי (כי נפרק את (f^*-f) למעגלי זרימה.

∎

מחירים "מופחתים" (reduced costs)

פונקצית מחירים $p : V \to \mathbb{R}$

אינטואיציה: $p(v)$ = מחיר הסחורה ב-v.

מחיר מופחת: $c_p(v,w) \triangleq p(v) + c(v,w) - p(w)$

אינטואיציה: $c_p(v,w)$ = הרווח מקניית סחורה ב-v, הובלה ל-w ומכירתה ב-w.

טענה:

$$\forall (x,y) \in E : \quad c_p(x,y) = -c_p(y,x)$$

$$\forall\, x \overset{\pi}{\rightsquigarrow} y : \quad c_p(\pi) = p(x) + c(\pi) - p(y)$$

$$\forall \text{ cycle } \gamma : \quad c_p(\gamma) = c(\gamma)$$

$$\sum_e c_p(e) \cdot f(e) = \sum_e c(e) \cdot f(e)$$

מסקנה: בעיית מציאת זרימה במחיר מינימום עם מחירים $c(e)$ שקולה למציאת זרימה במחיר מינימום עם מחירים מופחתים $c_p(e)$.

משפט (Ford & Fulkerson 62): זרימה מעגלית f היא במחיר מינימום אם"ם קיימת פונקצית מחירים p כך ש:

$$\forall e \in E : \quad r_f(e) > 0 \Rightarrow c_p(e) \ge 0$$

הוכחה: הכיוון הקל (⇒): אם קיימת p כך ש $c_p(e) \ge 0$ לכל קשת שיורית, הרי שברור שאין מעגל שלילי ב N_f ביחס ל c_p.

ולכן f במחיר מינימום ביחס ל c_p, ולכן גם ביחס ל c.

(⇐) מתפש p עבורה $0 \le c_p(x,y) = p(x)+c(x,y)-p(y)$

לכל קשת (x,y). כלומר: $p(y) \le p(x)+c(x,y)$.

למה הדבר דומה? לפונקציית מרחק $p(a) = dist_c(r,a)$

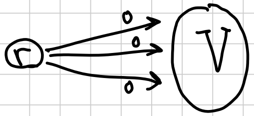
כאשר: r - הוא צומת שממנו נמדדים המרחקים

c - אורכי הקשתות.

צריך להקפיד ש- $dist_c(r,a)$ יהיה מוגדר היטב.

(א) שלא יהיה $+\infty$: כלומר מ-r יש מסלול לכולם...

נוסיף צומת חדש r ונחבר לכולם עם קשת באורך 0.



(ב) שלא יהיה $-\infty$: כלומר שלא נקבל מספר לא חסום

של פעמים דרך מעגל שלילי. אבל המרחקים נמדדים

ב E_f, ושם אין מעגל שלילי כי f במחיר מינימום.

ולכן
$$p(v) \triangleq \min\left\{ c(\pi) \;\middle|\; r \xrightarrow{\pi} v,\ \pi \text{ מסלול ב } E_f \right\}$$

מקיים את הנדרש. ☒

אלגוריתם בטול המעגלים השליליים [Klein 67]

(1) חשב זרימה מעגלית חוקית f.

(2) כל עוד N_f מכיל מעגל שלילי γ: שפר זרימה לאורך γ.

$$\begin{cases} \varepsilon = \min\{ r_f(e) : e \in \gamma \} \\ g \triangleq \text{זרימה בכמות } \varepsilon \text{ לאורך } \gamma \\ f \leftarrow f+g \end{cases}$$

סיבוכיות: אם הקיבולים והמחירים שלמים אז מס' האיטרציות

באלג' של קליין חסום ע"י $O(m\cdot U\cdot C)$, כאשר

$U \triangleq \max\{|u(e)|\}_e$, $C \triangleq \max\{|c(e)|\}_e$

הוכחה: כיון שהקיבולים שלמים נקבל שבכל איטרציה $\varepsilon \ge 1$.

כיון שהמחירים שלמים, למעגל שלילי מחיר ≤ -1.

ולכן בכל איטרציה הירידה במחיר ≥ 1.

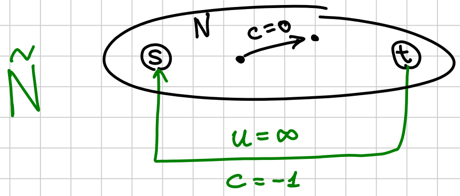
מאידך

$$\frac{1}{2}\sum_e c(e)\cdot f(e) \ge -\frac{1}{2} m\cdot C\cdot U \quad ☒$$

זמן ריצה פסאודו-פולינומי....

מציאת זרימה מעגלית במחיר מינימום מכלילה את הבעיה של מציאת זרימה מקס' (ללא מחירים).

הרדוקציה היא:



ואז זרימה מקס' מ s ל-t ממזערת את המחיר בגלל הקשת החדשה מ-t ל-s.

מה עושה האלג' של קליין ברשת הנ"ל?

מעגל שלילי ב $\tilde{N}_f$ $\longleftrightarrow$ מסלול שיפור ברשת השיורית N_f

$\Leftarrow$ קליין מכליל את Ford & Fulkerson!

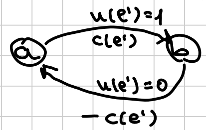
אלגוריתם capacity scaling לזרימה במחיר מינימום

- נניח שאין חסמים תחתונים, כלומר $\forall e: u(e)\geq 0$
- נתחיל בשאלה הבאה:

נתונה זרימה f במחיר מינימום ברשת N.

כעת מוסיף קשת $a \xrightarrow{e'} b$ במחיר $c(e')$ וקיבול 1.

כלומר:

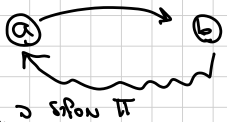


האם ידיעת f ב N עוזרת למציאת זרימה במחיר מינימום ב $N'=N+e'$?

נ"ב: אפילו אם $c(e')>0$ יתכן ש-f אינה במחיר מינימום ב N'...

נשאל האם הוספת e' (והקשת ההפוכה) מייצרת מעגל שלילי ברשת N'_f?

מעגל שלילי יתכן רק מהצורה



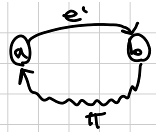
π מסלול ב N_f.

כאשר: $c(e') + c(\pi) < 0$

לכן נחשב מסלול קצר ביותר π (ביחס למחירים) מ b ל a.

אם $c(e') + c(\pi) > 0$, אז אין מעגל שלילי, ו-f נשארת במחיר מינימום גם ב N'. (ונגדיר $f'=f$).

אם $c(e')+c(\pi)<0$, אז נזרים יחידת זרימה במעגל $e'+\pi$ לקבלת f'.



<u>טענה:</u> f' זרימה במחיר מינימום ב N'.

<u>הוכחה:</u> נסמן $S = \{v \mid$ קיים מסלול מ b ל v ב $N_f\}$

כמובן $a\in S$ (כי $c(\pi)<\infty$), וכן צמתי π ב-S.

ולכן אם N'_f מכילה מעגל שלילי γ, אז המעגל מוכל ב S.

נשתמש בפונקציית מחירים $d: S\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י

$$d(v) = \min\{c(\pi') \mid \pi' \text{ מסלול מ } b \text{ ל-} v \text{ ב } N_f\}$$

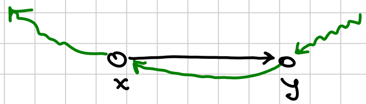
אם $e\in N_f$ כמובן $c_d(e)\geq 0$.

עבור e' נקבל

$$c_d'(e') = d(a)+c(\pi)-d(b) = c(\pi)-c(\pi)-0 = 0$$

ולכן גם $c_d(b,a)=0$.

נותר לדון בקשת $(x,y)\in N_{f'}$ שאינה ב N_f.



יתכן רק אם $(y,x)\in\pi$.

$$c_d(y,x) = d(y) + c(x,y) - c(x)$$

$$= 0 \quad (\text{כי } \pi \text{ מסלול קצר ביותר})$$

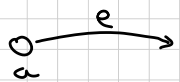
$\boxtimes$ לכן $c_d(x,y) \ge 0$.

אלג' הדירוג capacity scaling

דומה לאלג' של Gabow. יהי $k = \lceil \lg_2(\max\{u(e)\}+1)\rceil$

נפצל כל קשת ל k קשתות מקבילות.

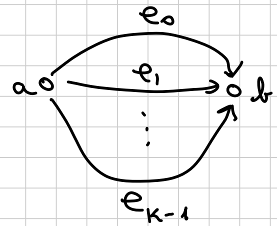
הקיבול של הקשת ה-i הוא 2^i או 0, בהתאם לספרת ה-i בייצוג של $u(e)$.



$$u(e) = \langle \alpha_{k-1} \cdots \alpha_0 \rangle$$

אז

$$u(e_i) = \alpha_i \cdot 2^i$$



נמיין את הקשתות (המפוצלות) לפי קיבול.

$$E_i = \{ e \mid u(e_i) = 2^i \}$$

תאור האלג':

1. מתחילים ברשת (V,E') כאשר $E'=\emptyset$ עם זרימה 0.
2. עבור $i=k-1$ ועד 0 בצע:
3. כל עוד קיימת קשת $e\in E_i$ שטרם נוספה ל E':
   - הוסף את e ל E' עם קיבול $u(e')=1$ ומחיר $c(e')$.
   - חשב זרימה במחיר מינימום f' ב (V,E').
4. הכפל קיבולים וזרימות ב E' פי 2.
5. החזר את f.