26.11.06 אלג' ברשתות

אלג' למציאת מעגל במשקל ממוצע מזערי. [Karp]

אלגוריתם למציאת מעגל עם משקל ממוצע מזערי [Karp]

$G=(V,E)$ - גרף מכוון, בה"כ קשיר היטב.

$w: E \rightarrow \mathbb{R}$ - משקל קשתות

נסמן: עבור מסלול P: $w(P) \triangleq \sum_{e \in P} w(e)$

$l(P) \triangleq$ אורך המסלול (מס' קשתות כולל חזרות)

משקל ממוצע: $A(P) \triangleq \frac{w(P)}{l(P)}$

$\hat{A} \triangleq \min\{A(C) \mid C \text{ מסלול מעגלי ב-} G\}$

בעיה: חשב את $\hat{A}$ ומצא מעגל C שמקיים $A(C)=\hat{A}$.

הערות:

(1) $\hat{A}$ מוגדר היטב אם G מכיל מעגל.

(2) קיים מעגל פשוט C עבורו: $A(C)=\hat{A}$

(3) מעגל פשוט C המקיים $A(C)=\hat{A}$ נקרא מעגל קריטי.

סימונים:

$$w_k(a,b) \triangleq \min\{w(P) \mid a \overset{P}{\rightsquigarrow} b,\ l(P)=k\}$$

(מינימום של קבוצה ריקה הוא $+\infty$).

וכן
$$w_0(a,b) = \begin{cases} 0 & \text{if } a=b \\ \infty & \text{if } a \neq b \end{cases}$$

משפט [Karp]: אם $\hat{A}=0$ אז לכל צומת r מתקיים

$$\min_{v \in V} \max_{0 \le k < n} \left(\frac{w_n(r,v) - w_k(r,v)}{n-k} \right) = 0$$

הוכחה: נתחיל בהוכחת ≥ 0.

אם $\hat{A}=0$, אז אין מעגל שלילי. בפרט G קשיר היטב ולכן מסלול קל ביותר מוגדר היטב:

$$w^*(r,v) \triangleq \min\{w(P) \mid r \overset{P}{\rightsquigarrow} v\}$$

כמובן
$$w^*(r,v) = \min_{0 \le k < n} w_k(r,v)$$

ולכן
$$w_n(r,v) \geq w^*(r,v)$$

נציב ונקבל $w_n(r,v) \ge w^*(r,v) = \min\limits_{0\le k<n} w_k(r,v)$

$\Leftarrow$ $$w_n(r,v) - \min_{0\le k<n} w_k(r,v) \ge 0$$

$\max -f(x) = -\min f(x)$

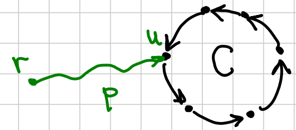
$\Leftarrow$ $$\max_{0\le k<n}\left(w_n(r,v) - w_k(r,v)\right) \ge 0$$

ולכן אגף שמאל ≥ 0.

כעת נראה שאגף שמאל $=0$, כלומר, נוכיח

$$(*)\quad \exists v\in V: \quad w_n(r,v) = w^*(r,v)$$

אם $\hat{A}=0$ אז קיים מעגל פשוט C במשקל 0.



נבחר $u \in C$ כלשהו, ונמצא מסלול קל ביותר P מ-r ל-u.

כלומר $w^*(r,u) = w(P)$.

למה: לכל $i\ge 0$: $P_i \triangleq P\circ C^i$ הוא מסלול קל ביותר מ-r ל-u.

הוכחה: $w(P_i) = w(P) + i\cdot w(C) = w(P) = w^*(r,u)$. ∎

מסקנה: כל רישא של P_i היא גם כן מסלול קל ביותר מ-r לצומת האחרון ב-P_i.

בחר i מספיק גדול כדי ש $\ell(P_i)\ge n$.

יהי P' רישא של P_i באורך n.

נסמן ב-v את הצומת האחרון ב P_i.

P_i מסלול קל ביותר $\Leftarrow$ $w^*(r,v) = w(P_i)$

P_i באורך n $\Leftarrow$ $w_n(r,v) \le w(P_i)$

לכן $w_n(r,v) \le w^*(r,v)$, ולכן v מקיים את $(*)$.

∎

מסקנה: $$\forall r: \quad \min_{v\in V}\ \max_{0\le k<n} \frac{w_n(r,v)-w_k(r,v)}{n-k} = \hat{A}$$

הוכחה: נפחית את המקרה $\hat{A}\ne 0$ למקרה $\hat{A}=0$.

נגדיר $w'(e)\triangleq w(e)+\alpha$. כיצד משפיעה ההגדרה על 2 האגפים:

$$A'(C) = \frac{w'(C)}{\ell(C)} = \frac{w(C)+\ell(C)\cdot\alpha}{\ell(C)} = A(C)+\alpha$$

ולכן $\hat{A}' = \hat{A}+\alpha$. יתרה מזאת

$$\{C \mid C \text{ קריטי ביחס ל-}w\} = \{C \mid C \text{ קריטי ביחס ל-}w'\}$$

מאידך:

$$\frac{w'_n(r,v)-w'_k(r,v)}{n-k} = \frac{w_n(r,v)+n\alpha-w_k(r,v)-k\alpha}{n-k}$$

$$= \frac{w_n(r,v)-w_k(r,v)}{n-k}+\alpha$$

ולכן אם $\alpha=-\hat{A}$ נקבל

$$\min_{v}\max_{0\le k<n}\frac{w_n(r,v)-w_k(r,v)}{n-k}$$

$$=\min_{v}\max_{0\le k<n}\left(\frac{w'_n(r,v)-w'_k(r,v)}{n-k}\right)+\hat{A}$$

$$=0+\hat{A}=\hat{A}.$$

האלגוריתם

קבע $r\in V$, מלא טבלה $w_k(r,v)$ לכל $v\in V$, $0\le k<n$.

חשב בזמן $O(n^2)$ את $\hat{A}$ לפי המסקנה.

איך ממלאים טבלה: תכנות דינמי.

$$w_0(r,v)=\begin{cases}0 & \text{if } r=v\\ \infty & \text{o.w.}\end{cases}$$

$$w_1(r,v)=\begin{cases}w(r,v) & \text{if } (r,v)\in E\\ \infty & \text{o.w.}\end{cases}$$

$$w_{i+1}(r,v)=\min_{\{u\mid (u,v)\in E\}}\left(w_i(r,u)+w(u,v)\right)$$

כדי לחשב w_{i+1} מספיק לבצע סריקה על כל הקשתות.

ולכן זמן מילוי הטבלה $O(m\cdot n)$.

(וזמן כזה שולט גם על זמן הרדוק').

איך מוצאים מעגל קריטי?

נניח שידענו לחלץ מסלול P באורך n שמקיים $w_n(r,v)=P$.

יהי v צומת שמקיים

$$\hat{A}=\max_{0\le k<n}\frac{w_n(r,v)-w_k(r,v)}{n-k}$$

טענה: יהי P מסלול באורך n שמקיים $w_n(r,v)=w(P)$.
כל מעגל פשוט ב-P הוא קריטי.

הוכחה: נפצל את הרדוקציה $\hat{A}=0 \prec \hat{A}\neq 0$.

כזכור, מעגל קריטי אםם קריטי אחרי הרדוקציה.

בהוכחת האלג' הראינו שהמסלול P מקיים $w'(P)=w'^{*}(r,v)$. (**)

יהי $C\subseteq P$ מעגל פשוט.

אם $w'(C)>0$, אז $P\setminus C$ יותר קל:

$$w'(P\setminus C)<w'(P)=w'^{*}(r,v)$$

בסתירה ל (**).

אם $w'(C)<0$, אז $\hat{A}'<0$, וסתירה.

ולכן $w'(C)=0 \Rightarrow A'(C)=0 \Rightarrow A'(C)=\hat{A}$, כנדרש.