אלגוריתמים ברשתות 10/3/08

מבוא לתכנות ליניארי:

הגאומטריה של תכנות ליניארי.

תזכורת מאלגברה ליניארית:

תהי A מטריצה ריבועית n×n. הטענות הבאות שקולות:

1. A הפיכה.
2. A^t הפיכה
3. $\det(A) \neq 0$
4. שורות A בת"ל ליניארית
5. עמודות A בת"ל ליניארית
6. לכל $b \in \mathbb{R}^n$ יש למערכת $Ax=b$ פתרון יחיד.
7. קיים $b \in \mathbb{R}^n$ עבורו למערכת $Ax=b$ יש פתרון יחיד.

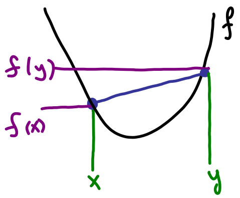
תהי $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ פונקציה.

f היא **ליניארית** אם $f(x) = Ax$ עבור $A \in M_{n \times m}$

f היא **קמורה** (convex) אם $n=1$ וכן $\forall x,y \in \mathbb{R}^m \ \forall \lambda \in [0,1]$:

$$\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \geq f(\lambda x + (1-\lambda) y)$$

גאומטרית: הקטע בין $f(x)$ ל $f(y)$ לא יורד מתחת לגרף של f.



f היא **קעורה** (concave) אם $-f$ קמורה.

תרגיל: אם $f_1,\dots,f_m$ קמורות אזי

$$f(x) \triangleq \max\{f_1(x),\dots,f_m(x)\}$$

גם כן קמורה.

הגדרה, **פוליהדרון** polyhedron $\{x\in\mathbb{R}^n \mid Ax\ge b\}$

$S\subseteq\mathbb{R}^n$ **חסומה** אם קיים קבוע K כך שלכל $x\in S$: $\|x\|\le K$.

היפר מישור $\{x\in\mathbb{R}^n : a^t x = b\}$

חצי מרחב $\{x\in\mathbb{R}^n : a^t x \ge b\}$

הערות: ① a נ״צ להיפר-מישור $\{x \mid a^t x=b\}$

② פוליהדרון הוא חיתוך של חצאי מרחב.

③ היפר מישור הוא מרחב אפיני ממימד $n-1$.

משפט

יהי S תת מרחב לינארי הנפרש ע״י $x^1,\dots,x^k$.

נניח $\dim(S)=m$.

① קיים בסיס של S המורכב מ-m וקטורים מהקבוצה $\{x^1,\dots,x^k\}$

② אם $l\le m$ וגם $x^1,\dots,x^l$ בת״ל, אז ניתן להשלים לבסיס ע״י $m-l$ וקטורים מהקבוצה $\{x^{l+1},\dots,x^k\}$.

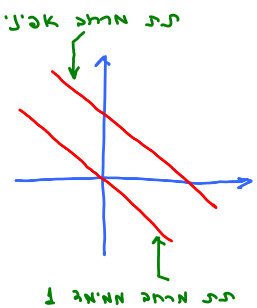
תת מרחב אפיני

$$S = S_0 + x^0$$

$S_0\subseteq\mathbb{R}^n$ - תת מרחב וקטורי.

$x^0\in\mathbb{R}^n$ - וקטור

מימד $S \triangleq$ מימד S_0.



תת מרחב וקטורי: $U\subseteq\mathbb{R}^n$ היא תת מרחב אם

$$\forall a,b\in\mathbb{R}\ \forall x,y\in U:\ ax+by\in U$$

המרחב הנפרש ע״י $\mathbb{R}^n\ni x^1\cdots x^k$

$$\left\{\sum_{i=1}^{k} a_i x^i \;\middle|\; a_1,\dots,a_k\in\mathbb{R}\right\}$$

אי-תלות: $x^1\cdots x^k\in\mathbb{R}^n$ הם בת״ל לינארית אם:

$$\forall a_1,\dots,a_k\in\mathbb{R}:\ \sum_{i=1}^{k} a_i x^i = 0 \Rightarrow a_1=a_2=\dots=a_k=0$$

מימד של תת מרחב U: גודל מקסימלי של קבוצה בת״ל לינארית ב-U. מסומן ע״י $\dim(U)$.

בסיס: קב׳ בת״ל של וקטורים ב-U שאורכה $\dim(U)$ וקטורים.

<u>קבוצות קמורות</u>

$S\subseteq\mathbb{R}^n$ היא **קמורה** אם

$$\forall x,y\in S\ \forall \lambda\in[0,1]:$$

$$\lambda\cdot x+(1-\lambda)y\in S$$

צירוף קמור: $x=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i x^i$

כאשר $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i=1$, $\forall i:\lambda_i\geq 0$.

קמור: בהינתן $x^1,\dots,x^k\in\mathbb{R}^n$ הקמור שלהם הוא הקבוצה

convex hull

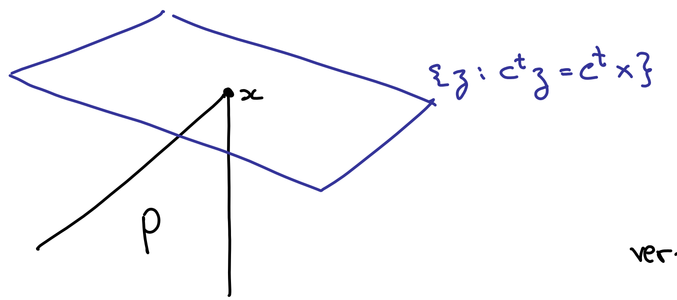
$$\left\{\sum_{i=1}^{k}\lambda_i x^i \;\middle|\; \forall i:\lambda_i\geq 0,\ \sum_{i=1}^{k}\lambda_i=1\right\}$$

<u>משפט:</u>

1. חיתוך של קבוצות קמורות הוא קמור.
2. כל פוליהדרון הוא קמור.
3. צירוף קמור של מס' סופי של איברי קבוצה קמורה שייך לקבוצה הקמורה.
4. הקמור של מס' סופי של וקטורים הוא קבוצה קמורה.

<u>הגדרה:</u> $x\in P$ נקרא **קודקוד** אם קיים וקטור c המקיים:

$$\forall y\in P\setminus\{x\}:\ c^t y<c^t x$$

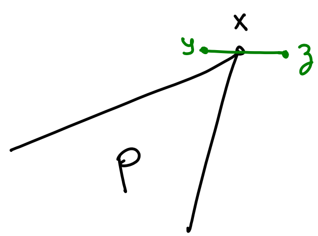


קודקוד = vertex

<u>הגדרה:</u> יהי $P=\{x: Ax\geq b\}$ פוליהדרון.

נקודה $x\in P$ נקראת **נק' קיצון** אם לא קיימות נקודות $y,z\in P$ וסקלר $\lambda\in[0,1]$ כך ש:

1. $y\neq x$ וגם $z\neq x$.
2. $x=\lambda y+(1-\lambda)z$



נק' קיצון = extreme point

נק' קיצון ⇐ פתרון פיזיבילי בסיסי:

בדרך השלילה, נניח x^* אינו פתרון בסיסי פיזיבילי.

לפיכך $I \triangleq \{ i \mid a_i x^* = b_i \}$ אינו מכיל n אילוצים בת"ל.

יהי $d \in \mathrm{Span}\{a_i\}_{i\in I}^{\perp}$ (כלומר: $\forall i \in I \ \ a_i d = 0$).

נבחר $\varepsilon > 0$ קטן ונגדיר $y \triangleq x^* + \varepsilon d$, $z = x^* - \varepsilon d$.

נשים לב:

$$\forall i \in I : \ a_i^t \cdot y = a_i^t x = b_i$$

$$\forall j \notin I : \ a_j^t y = \underbrace{a_j^t x}_{> b_j} + \underbrace{a_j^t(\varepsilon d)}_{\text{קטן אם } \varepsilon \text{ קטן}} > b_j$$

ולכן $y \in P$, ובאותו אופן $z \in P$. ולכן x^* אינה נק' קיצון. ■

הגדרה: יהי $P \subseteq \mathbb{R}^n$ פוליהדרון המוגדר ע"י אילוצי שוויון ואילוצי אי שוויון.

① x^* הוא **פתרון בסיסי** אם הוא מספק את כל אילוצי השוויון, וכן מבין האילוצים הפעילים יש n אילוצים בת"ל. (יתכן שאילוצי אי-שוויון לא מתקיימים!)

② אם x^* הוא פתרון בסיסי וכל האילוצים מתקיימים, אז x^* הוא **פתרון בסיסי פיזיבילי**.

פתרון בסיסי פיזיבילי = basic feasible solution (bfs)

x bfs $\Leftarrow$ $x \in P$.

משפט יהי $P \subseteq \mathbb{R}^n$ פוליהדרון לא ריק.

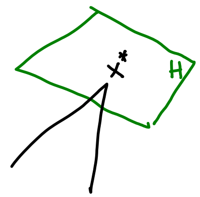
יהי $x^* \in P$.

שלוש הטענות הבאות שקולות:

① x^* קודקוד

② x^* נקודת קיצון

③ x^* פתרון בסיסי פיזיבילי



קודקוד ⇐ נקודת קיצון:

יהי $H = \{ z \mid c^t z = c^t x^* \}$ מישור התומך ב-x^*.

כלומר $\forall x \in P \setminus \{x^*\} : \ c^t x < c^t x^*$

אם x^* בפנים הקטע $P \supseteq [y,z]$ (עבור $y \neq z$)

אז y,z באותו צד של H, ולכן גם הקטע $[y,z]$, ולכן גם x^*. סתירה.

נסתכל במערכת אי שוויונות $Ax \geq b$.

אם אי-שוויון מתקיים בשוויון, נאמר שאי-השוויון **פעיל או הדוק**.

משפט: יהי $x^* \in \mathbb{R}^n$ ותהי $I = \{ i \mid a_i^t x^* = b_i \}$.

אז: הטענות הבאות שקולות:

① הקבוצה $\{a_i \mid i \in I\}$ מכילה n וקטורים בת"ל.

② הקבוצה $\{a_i \mid i \in I\}$ פורשת את $\mathbb{R}^n$.

③ למערכת השוויונות $\forall i \in I \ \ a_i^t x = b_i$ יש פתרון יחיד.

① $H\cap P=\{x^*\}$ וכן $\forall x\in P\setminus\{x^*\}: c^t x>\beta$.

ולכן x^* הוא קודקוד.

יתרה מזאת x^* הוא הפתרון היחיד של התכנית הלינארית:

$$\min\{c^t x \mid Ax\geq b\}$$

(כלומר: לכל פתרון בסיסי פיזיבילי x^* קיימת פונקציית מטרה: $f(x)=c^t x$ שעבורה x^* מהווה מינימום מבין נק' P.)

שאלה: כמה פתרונות בסיסיים יכולים להיות?

פתרון בסיסי פיזיבילי $\Leftarrow$ קודקוד:

יהי x^* פתרון בסיסי פיזיבילי. נגדיר $I\triangleq\{i \mid a_i^t x^*=b_i\}$

וכן $c\triangleq\sum_{i\in I}a_i$.

נקבל: $c^t x^*=\sum_I a_i^t x^*=\sum_I b_i\triangleq\beta$

ולכל $x\in P$: $c^t x=\sum_I a_i^t x\geq\sum_I b_i=\beta$

ולכן $c^t x=\beta \iff$ לכל $i\in I: a_i^t x=b_i$.

אבל למערכת $\{a_i^t x=b_i\}$ יש פתרון יחיד (כי $\{a_i\}_I$ מכיל בסיס). הפתרון היחיד הוא x^*.

משמע המישור $H=\{z \mid c^t z=\beta\}$ מקיים: