13/3/08

# אלגוריתמים ברשתות

המשך מבוא לתכנות ליניארי

- פתרונות בסיסיים
- ניוון (degeneracy)
- קיום נק' קיצון
- אופטימליות של נק' קיצון.
- הכללה: אלימינציה בשיטת Fourier – Motzkin

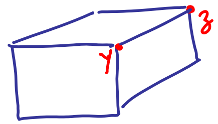
---

**הגדרה:** 2 פתרונות בסיסיים $y\neq z$ נקראים שכנים אם $I_y\cap I_z$ מכיל $n-1$ אילוצים בת"ל, כאשר

$$I_y \triangleq \{a_i \mid a_i y = b_i\}$$

$$.I_z \triangleq \{a_i \mid a_i z = b_i\}$$

הערה: הבסיס "המתאים" ל-$z$ מתקבל ע"י החלפת אילוץ אחד בבסיס "המתאים" ל-$y$.




---

## צורה סטנדרטית

$$P=\{x \mid Ax=b,\ x\geq 0\}$$

נסמן: $n$ - מס' עמודות $A$, $m$ - מס' שורות $A$.

בה"כ: מניחים: שורות $A$ בת"ל (ולכן $m\leq n$).

אם $x^*$ פתרון בסיסי אז $Ax^*=b$ וכן $n-m$ אילוצים מתקיימים בשוויון. כלומר: ב-$x^*$ יש לפחות $n-m$ רכיבים שווים $0$.

---

**משפט:** (ביחס לצורה סטנדרטית)

$x^*$ פתרון בסיסי אמ"מ $Ax^*=b$ וכן יש $m$ אינדקסים $\{B(i)\}_{i=1}^{m}$ המקיימים:

① העמודות $\{A^{B(i)}\}_{i=1}^{m}$ בת"ל.

וכן ② $i\notin\{B(1),\dots,B(m)\} \Longrightarrow x^*_i=0$

**הוכחה:** $(\Longrightarrow)$ בה"כ $\{B(i)\}_{i=1}^{m}=\{1,\dots,m\}$.

ואז נסתכל במערכת השוויונים:

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{c} m \\ n-m \end{array} & \left(\begin{array}{c|c} A^1 \cdots A^m & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{matrix} \end{array}\right) \\ & \begin{array}{cc} \qquad m \qquad & \qquad n-m \end{array} \end{array} \cdot x = \begin{pmatrix} b \\ 0^{n-m} \end{pmatrix}$$

$x^*$ מקיים את $n$ המשוואות

ולכל $i \notin Z$: $x_i = x_i^*$, משמע גם למערכת

$$\left(A^{B(1)} \cdots A^{B(n-|Z|)}\right) \tilde{x} = b$$

יש פתרון יחיד כאשר $\{B(1) \dots B(n-|Z|)\} \triangleq \{1,\dots,n\} \setminus Z$

ולכן העמודות הן בת"ל, משמע $rank(A) = m \geq n-|Z|$

$\Leftarrow$ $n-m \leq |Z|$ (כנדרש בחלק ⓑ).

אם $n-m < |Z|$, אז נרחיב את $A^{B(1)},\dots,A^{B(n-|Z|)}$ לבסיס של $\mathbb{R}^m$

ע"י הוספת עמודות עם אינדקסים ב- $Z$.

---

כיון ש- $A^1 \cdots A^m$ בת"ל, $m$ הרכיבים הראשונים של

כל פתרון נקבעים באופן יחיד.

$n-m$ הרכיבים האחרונים של כל פתרון הם אפס.

דרגת המטריצה היא $n$, ולכן קב' האילוצים הפעילים

מכילה בסיס, כנדרש.

($\Leftarrow$) נסמן $Z \triangleq \{i \mid x_i^* = 0\}$.

כיון ש- $x^*$ פתרון בסיסי נקבל שקב' האילוצים $A$

ביחד עם וקטורי היחידה $\{e^i\}_{i\in Z}$ מכילים בסיס.

ולכן למערכת השוויונים

$$\begin{pmatrix} A \\ \{e^i\}_{i\in Z}\end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} b \\ 0^{|Z|}\end{pmatrix}$$

יש פתרון יחיד.

לכל פתרון: נקבל $x_i = 0 \Rightarrow i \in Z$.

---

## מינוח

עבור פתרון בסיסי $x$, הרכיבים $x_{B(1)} \cdots x_{B(m)}$

נקראים **משתנים בסיסיים** (או משתני בסיס).

שאר הרכיבים הם לא-בסיסיים.

העמודות $A^{B(1)} \cdots A^{B(m)}$ נקראות **עמודות הבסיס**,

ומהוות בסיס של $\mathbb{R}^m$.

תת-קבוצה של $m$ עמודות בת"ל נקראת **בסיס**.

ונתייחס לבסיסים שמתקבלים מתת-קבוצות שונות כשונים.

המטריצה $m \times m$ המתקבלת מעמודות בסיס נקראת

**מטריצת בסיס**. נסמן $B = \left(A^{B(1)} \cdots A^{B(m)}\right)$ מטריצת בסיס.

---

## בניית פתרונות בסיסיים

① מצא $m$ עמודות בת"ל ב- $A$. נסמנם $A^{B(1)} \cdots A^{B(m)}$.

② קבע $x_i^* = 0$ לכל $i \notin \{B(1),\dots,B(m)\}$.

③ פתור את השוויונים

$$\left(A^{B(1)} \cdots A^{B(m)}\right)\tilde{x} = b$$

או באופן שקול:

$$\begin{pmatrix} A \\ \hline e^{\bar{B}(1)} \\ \vdots \\ e^{\bar{B}(n-m)} \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} b \\ 0^{n-m} \end{pmatrix}$$

אם פתרון בסיסי $x$ מקיים $x \geq 0$, אז הוא גם פיזיבילי.

וכמו כן $x^B = \begin{pmatrix} x_{B(1)} \\ \vdots \\ x_{B(m)} \end{pmatrix}$

ואז B הפיכה ומקיימת: $B \cdot x^B = b$

ולכן $\boxed{x^B = B^{-1} \cdot b}$.

הערות:

① בסיסים שונים יכולים להגדיר פתרונות בסיסים זהים. לדוגמא, אם $b=0$, אז כל פתרון בסיסי $= 0^n$.

② אם $x^*, y^*$ פתרונות בסיסים שכנים, אז אפשר למצוא בסיסים מתאימים $B_{x^*}, B_{y^*}$ הנבדלים רק בוקטור אחד. (תזכרו להוכחה שמוצאת בסיס עמודות, בהינתן פתרון בסיסי!).

③ טענה: אם פוליהדרון הנתון בצורה סטנדרטית אינו ריק, אזי ניתן להפחית את מטריצת האילוצים כך שיתקבל תיאור של הפוליהדרון בצורה סטנדרטית ויתקיים: rank(מטריצת האילוצים) = מס' שורות המטריצה

הוכחה: $P = \{x \mid Ax=b,\ x\geq 0\}$.

A מטריצה $m\times n$ ונניח $k = rank(A) < m$

בה"כ: השורות $a_1, \dots, a_k$ בת"ל.

נגדיר $Q \triangleq \{x \mid \forall 1\leq i\leq k: a_i x = b_i \ \&\ x\geq 0\}$

נראה ש $Q = P$:

כמובן $P \subseteq Q$. (למה?)

נראה כי $Q \subseteq P$. נבחר $y\in Q$ ונראה כי $y\in P$.

יהי $1+k \leq j \leq m$. כמובן $a_j$ נפרש ע"י k השורות הראשונות:

$$a_j = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i$$

לכל $x\in P$ אז:

$$b_j = a_j x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i b_i \Rightarrow b_j = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i b_i$$

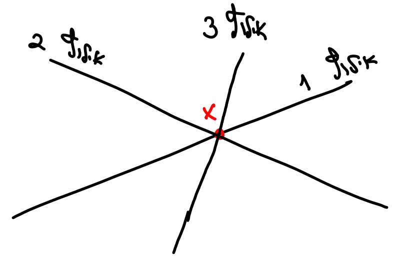
ולכן

$$a_j \cdot y = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i y = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i b_i = b_j$$

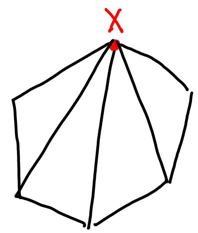
$\Leftarrow y\in P$, כנדרש.

ניוון: פתרון בסיסי מנוון אם מס' האילוצים הפעילים ביחס ל-x גדול מ-n.

לדוגמה: $n=2$




$n=3$:




בצורה סטנדרטית: ניוון $\Leftrightarrow$ יותר מ $(n-m)$ רכיבים מתאפסים.

פתרון בסיסי נקרא מנוון אם מכיל יותר מ-$(n-m)$ אפסים.

## האם לכל פוליהדרון יש נק' קיצון?

**הגדרה:** פוליהדרון $P$ מכיל ישר אם קיים $x\in P$, וכן וקטור $d\in\mathbb{R}^n$ המקיימים:

$$\forall \lambda\in\mathbb{R}:\ x+\lambda d\in P$$

**משפט:** יהי $P=\{x\in\mathbb{R}^n : Ax\geq b\}$ פוליהדרון שאינו ריק. 3 התנאים הבאים שקולים:

① $P$ אינה מכילה ישר.

② $P$ מכילה נק' קיצון אחת לפחות.

③ $\text{rank}(A)\geq n$.

---

ניוון הוא תלוי בייצוג:

$$P=\{x \mid Ax=b,\ x\geq 0\}$$

$$P=\{x \mid Ax\geq b,\ Ax\leq b,\ x\geq 0\}$$

---

$x+\lambda^* d$ נמצא על שפת $P$ ומהדק אילוץ $a_j$ שאינו הדוק ביחס $x$.

כמובן $a_j\notin \text{Span}\{a_i \mid a_ix=b_i\}$, שכן אחרת

$$a_j(x+\lambda^* d)=\underbrace{a_jx}_{\underset{\neq}{>} b_j}+\lambda\cdot\underbrace{a_jd}_{=0}\ \underset{\neq}{>}\ b_j.$$

נגדיר $\hat{x}\triangleq x+\lambda^* d$

ולכן $r(\hat{x})>r(x)$, כנדרש.

$(3\Leftarrow 2)$ בנקודת קיצון, האילוצים ההדוקים מכילים בסיס, ולכן $\text{rank}(A)=n$.

$(1\Leftarrow 3)$ נניח $\overbrace{a_1,\dots,a_n}^{A\ \text{שורות}}$ בת"ל ונניח בשלילה $P$ מכיל את הישר $x+\lambda d$ עבור וקטור $d\neq 0$.

---

**הוכחה:** $(2\Leftarrow 1)$ נראה שהעדר ישר ב-$P$ מאפשר להפעיל פרוצדורה בעלת התכונה הבאה. בהינתן $x\in P$, אם $r(x)\triangleq \text{rank}(\{a_i \mid a_ix=b_i\})<n$ נמצא $\hat{x}\in P$ המקיים $r(\hat{x})>r(x)$.
בסוף נמצא באופן כזה $y\in P$ המקיים $r(y)=n$, ולכן $y$ הוא פתרון בסיסי פיזיבילי, כנדרש.

**שיטה:** אם $r(x)<n$, יהי $I=\{i: a_ix=b_i\}$. למערכת המשוואות $\{a_ix=0\}_{i\in I}$ יש פתרון $d\neq 0$.

ונסתכל על הישר $\{x+\lambda d\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$. בסביבה של $x$, הישר מוכל ב-$P$, אבל עבור $|\lambda|$ מספיק גדול, הישר מהדק לפחות עוד אילוץ כלשהו ויוצא מ-$P$. כלומר: קיים $\lambda^*$ עבורו

לפיכך: $\forall i\ \forall \lambda:\quad a_i(x+\lambda d) \ge b_i$

וזה אפשרי רק אם $\forall i: a_i d = 0$.

כלומר $d \in \left(\text{span}\{a_1 \cdots a_n\}\right)^\perp$

אבל $a_1 \cdots a_n$ פורשים, ולכן $d=0$. סתירה. ∎

הרביע החיובי $\{x \mid x \ge 0\}$ לא מכיל ישר.

כל פוליהדרון בצורה הסטנדרטית מוכל ברביע החיובי.

לכן כל פוליהדרון בצורה סטנדרטית אינו מכיל ישר, ולכן יש לו לפחות קודקוד אחד.

---

**משפט:** תהי $\min\{c^t x \mid x \in P\}$ תכנית לינארית ביחס לפוליהדרון $P$. אם $P$ מכיל לפחות קודקוד אחד, והמינימום הנ"ל מוגדר היטב (גדול מ- $(-\infty)$), אזי המינימום מתקבל בקודקוד של $P$.

כלומר:

$-\infty < \min\{c^t x : x \in P\}$ & $P$ מכיל קודקוד $\Leftarrow$ קיים קודקוד $x^* \in P$ עבורו $c^t x^* = \min\{c^t x \mid x \in P\}$

**הוכחה:** יהי $\gamma \triangleq \min\{c^t x \mid x \in P\}$.

נגדיר $Q \triangleq \{x \mid x \in P \ \&\ c^t x = \gamma\}$.

$P$ מכיל קודקוד $\Leftarrow$ $P$ לא מכיל ישר.

$Q \subseteq P$ $\Leftarrow$ $Q$ לא מכיל ישר $\Leftarrow$ $Q$ מכיל קודקוד.

---

יהי $x^*$ קודקוד של $Q$. נוכיח ש-$x^*$ גם קודקוד של $P$.

אם $x^*$ אינו קודקוד של $P$, אז הוא לא נק' קיצון.

משמע $x^*$ בפנים הקטע $[y,z]$ שקצותיו ב-$P$.

$c^t y, c^t z \ge \gamma \quad \& \quad c^t x = \gamma$

$\Leftarrow \quad c^t y = c^t z = \gamma$

$\Leftarrow \quad y,z \in Q \quad \Leftarrow \quad x$ לא נק' קיצון ב-$Q$. ∎

**מסקנה:** $\min\{c^t x \mid x \in P\} \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R}$.

הערה: $\min\{\frac{1}{x} \mid x > 0\}$ אינו קיים!

ולכן המסקנה אינה ברורה מאליה.

---

**הטלות: אלימינציה בשיטת Fourier-Motzkin**

הפונקציה $\Pi_K : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^K$

המוגדרת ע"י $\Pi_K(x_1,\dots,x_n) \triangleq (x_1,\dots,x_K)$

נקראת **הטלה**.

$$\Pi_K(S) \triangleq \{\Pi_K(x) \mid x \in S\}$$

**שאלה:** נתון פוליהדרון $P=\{x \mid Ax \ge b\}$.

האם $P \ne \emptyset$?

**רעיון לפתרון:** נמצא "נוסח" של $\Pi_{n-1}(P)$.

ונענה לפי: האם $\Pi_{n-1}(P) \ne \emptyset$?

כמובן $P \ne \emptyset \Leftrightarrow \Pi_{n-1}(P) \ne \emptyset$. ונמשיך ברקורסיה...

יתרה מזאת: $\Pi_1(\Pi_2(\Pi_3(\cdots(\Pi_{n-1}(P)\cdots) = \Pi_1(P)$

לכן $P \neq \emptyset \iff \Pi_1(P) \neq \emptyset$.

ועכשיו "קל" לבדוק האם $\Pi_1(P) \neq \emptyset$ בהינתן ייצוג $\Pi_1(P) = \{x \mid \tilde{A}x \geq \tilde{b}\}$.

איך מוצאים ייצוג $\Pi_{n-1}(P) = \{x' \mid A'x' \geq b'\}$ ?

## אלגוריתם האלימינציה

① האילוץ $a_i x \geq b_i$ ניתן לכתיבה בתור $a_{in}x_n \geq b_i - \bar{a}_i \cdot \bar{x}$

כאשר $\begin{cases} \bar{x} \triangleq (x_1,\dots,x_{n-1}) \\ \bar{a}_i = (a_{i1},\dots,a_{i,n-1}) \end{cases}$

← אם $a_{in} > 0$ נכתב

(*) $\boxed{x_n \geq \frac{1}{a_{in}} \cdot b_i - \frac{\bar{a}_i}{a_{in}} \cdot \bar{x}} \triangleq d_i + f_i \bar{x}$

$d_i \triangleq \frac{b_i}{a_{in}} \in \mathbb{R}, \quad f_i \triangleq \frac{-\bar{a}_i}{a_{in}} \in \mathbb{R}^{n-1}$

← אם $a_{in} < 0$ נכתב

(**) $\boxed{d_i + f_i \bar{x} \geq x_n}$

← אם $a_{in} = 0$ נכתב

(***) $\boxed{\bar{a}_i \bar{x} \geq b_i}$

הגדר פוליהדרון $Q \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ ע"י קב' האילוצים

לכל $i$ עבורו $a_{in}=0$: $\bar{a}_i \bar{x} \geq b_i$

$\forall i: a_{in} > 0 \ \forall j: a_{jn} < 0 : \quad d_j + f_j \bar{x} \geq d_i + f_i \bar{x}$

$\iff (f_j - f_i)\bar{x} \geq (d_i - d_j)$

**טענה:** $Q = \Pi_{n-1}(P)$.

**הערות:** אם $P$ מוגדר ע"י $m$ אילוצים, $Q$ מוגדר ע"י לכל היותר $\left(\frac{m}{2}\right)^2$ אילוצים. ולכן זהו אינו אלג' פולינומי.

**מסקנה:** אם $P$ פוליהדרון, אזי $\Pi_k(P)$ גם כן פוליהדרון.

**תוצאה:** אם $P \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$ פוליהדרון, אזי

$P' \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists y \in \mathbb{R}^k : (x,y) \in P\}$

הוא גם כן פוליהדרון.

**תוצאה:** אם $P \subseteq \mathbb{R}^n$ פוליהדרון, וכן $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ טרנספורמציה לינארית, אז $T(P)$ גם כן פוליהדרון.

**הוכחה:** $Q = \{(x,y) \mid x \in P, \ Tx = y\}$

הוא פוליהדרון, ו- $T(P)$ הוא הטלה של $Q$.

**תוצאה:** הקמור של קבוצה סופית $X \subseteq \mathbb{R}^n$ הוא פוליהדרון.

**הוכחה:** $\text{conv-hull}(x_1 \dots x_k) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \;\middle|\; \vec{\lambda} \geq 0,\ 1^t \vec{\lambda} = 1 \right\}$

אבל $P = \left\{ (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \;\middle|\; \lambda_1 \dots \lambda_k \geq 0,\ \Sigma \lambda_i = 1 \right\}$

הוא פוליהדרון.

$T(\lambda_1 \dots \lambda_k) \triangleq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$ היא העתקה לינארית.

ולכן $T(P)$ הוא פוליהדרון. אבל

$T(P) = \text{conv-hull}(x_1, \dots, x_k)$. $\boxtimes$