17/3/08 אלגוריתמים בהשמות

- תזכורת של שיטת האלימינציה של Fourier-Motzkin
- הלמה של Farkas + וריאציות
- משפט דואליות בצורתו החזקה

תזכורת: אלימינציה בשיטת Fourier-Motzkin

① נכתוב $Ax \le b$: $\left(\bar{x} \triangleq \langle x_2, \dots, x_n \rangle ,\ \bar{a}_i \triangleq \langle a_{i2}, \dots, a_{in} \rangle\right)$

$$x_1 + \bar{a}_i \bar{x} \le b_i \qquad 1 \le i \le m_1$$

$$-x_1 + \bar{a}_i \bar{x} \le b_i \qquad m_1 < i \le m_2$$

$$\bar{a}_i \bar{x} \le b_i \qquad m_2 < i \le m$$

② היפטר מהמשתנה x_1:

$\forall i \in [1, m_1]\ \forall j \in [m_1+1, m_2]$:

$$-b_j + \bar{a}_j \bar{x} \le x_1 \le b_i - \bar{a}_i \bar{x}$$

$$\iff \quad (\bar{a}_j + \bar{a}_i) \cdot \bar{x} \le b_i + b_j$$

$\forall i \in [m_2+1, m]$: $\quad \bar{a}_i \bar{x} \le b_i$

טענה: יהיו $P \triangleq \{ x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \le b \}$

$$Q \triangleq \{ \bar{x} \in \mathbb{R}^{n-1} \mid \tilde{A} \bar{x} \le \tilde{b} \}$$

כאשר $\tilde{A}, \tilde{b}$ מתאימים לאילוצים אחרי האלימינציה של x_1

אז

$$Q = \Pi_{\{2,\dots,n\}}(P)$$

למה של Farkas: 2 התנאים הבאים שקולים:

① הפוליהדרון $P = \{Ax \le b\}$ אינו ריק.

② לא קיים וקטור $y \ge 0$ עבורו: $y^t b < 0$ & $y^t A = 0$.

הוכחת ② ⇐ ①:

אם $A\tilde{x} \le b$ וכן $y \ge 0$ מקיים $y^t b < 0$ & $y^t A = 0$

אזי

$$0 > y^t b \underset{\substack{\uparrow \\ \left\{ \substack{y \ge 0 \\ A\tilde{x} \le b} \right. \text{ וכן}}}{\ge} y^t (A\tilde{x}) = (y^t A)\tilde{x} = 0$$

וסתירה.

לפני שנוכיח ① ⇐ ② נבחן 2 דוגמאות:

דוגמה 1: A מטריצה 1×1:

$$\exists x : ax \le b \iff \left\{ \begin{array}{l} a = 0 \text{ וכן } b \ge 0 \\ a \ne 0 \text{ או} \end{array} \right\} \iff (a = 0 \Rightarrow b \ge 0)$$

$$\boxed{\neg(x \to y) \equiv x \wedge \neg y}$$

$$(b < 0 \ \&\ a = 0) \iff \exists y \ge 0 : \left\{ \begin{array}{l} ya = 0 \\ \text{וכן} \\ yb < 0 \end{array} \right. \text{אם}$$

דוגמא 2: A מטריצה $m\times 1$.

נניח שאין פתרון למערכת $\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_m\end{pmatrix}x\le b$

2 אפשרויות:

(א) קיים אינדקס i עבורו $a_i=0$ בעוד $b_i<0$.

נשים לב שאם $a_i=0$ אבל $b\ge 0$, אז האילוץ $a_ix\le b$ מיותר כי הוא מסתפק לכל x. ולכן אם (א) לא מתקיים, משמע $\forall i: a_i\neq 0$.

במקרה א' נוכל למצוא y כמבוקש:

נגדיר $y\triangleq e^i$ ואז

$$\left.\begin{aligned} y^tb &= b_i<0\\ y^tA &= a_i=0\end{aligned}\right\}$$

דוגמא 2 (המשך): A מטריצה $m\times 1$.

נניח שאין פתרון למערכת $\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_m\end{pmatrix}x\le b$

אם לא מתקיים (א) משמע:

לכל i, $a_i\neq 0$ ולכן

(ב) קיימים שני אינדקסים $i\neq j$ עבורם

$$\frac{b_j}{a_j}\le\frac{b_i}{a_i}\ \Leftarrow\ \begin{cases} a_i>0 \text{ ולכן } x\le b_i/a_i\\ a_j<0 \text{ ולכן } x\ge b_j/a_j\end{cases}$$

אבל $\frac{b_j}{a_j}>\frac{b_i}{a_i}$ $\quad (a_ib_j<a_jb_i \Leftrightarrow)$

נבנה $y\ge 0$ ע"י הגדרה $y\triangleq -a_je^i+a_ie^j$

נשים לב כי:

(i) $a_i>0\ \&\ a_j>0 \ \Rightarrow\ y\ge 0$

(ii) $y^tA=a_ja_i-a_ia_j=0$

אבל $y^tb=-a_jb_i+a_ib_j<0$

כעת נוכיח ① $\Leftarrow$ ② [באופן שקול ¬② $\Leftarrow$ ¬①]

ההוכחה באינדוקציה על מס' עמודות A.

בסיס האינדוקציה עבור $n=1$ הוכח בדוגמא 2.

נעבור לשלב האינדוקציה...

נפעיל את צעד האלימינציה של Fourier-Motzkin על המערכת $Ax\le b$.

תהי $\tilde A\tilde x\le\tilde b$ המערכת עם $n-1$ משתנים.

$\phi=\{x\mid Ax\le b\}\ \Rightarrow\ \phi=\{\tilde x\mid \tilde A\tilde x\le\tilde b\}$, ולפי הנחת האינדוקציה: קיים $\tilde y\ge 0$ עבורו $\tilde y^t\tilde A=0\ \&\ \tilde y^t\tilde b<0$.

כעת נבנה את y בעזרת $\tilde y$:

בה"כ: $\tilde y^tb=-1$ וגם העמודה הראשונה של A מכילה רק $\{0,\pm 1\}$.

הערה 1: $\tilde y^t\cdot(\tilde A\mid\tilde b)=0^{n-1}\cdot{-1}$

הערה 2: $\tilde y^t\cdot(0\mid\tilde A\mid\tilde b)=0^{n}\cdot{-1}$

הערה 3: כל שורה של $\tilde{A}$ היא שורה a_i של A (שבה $a_{i1}=0$) או סכום a_r+a_s של שורות A (שמקיימים $a_{r1}+a_{s1}=0$).

הערה 4: כל שורה של $(0,\tilde{A})$ היא שורה של A או סכום של 2 שורות של A.

הגדרה: חרוט שנפרש ע"י קבוצת וקטורים.

תהי $\mathbb{R}^n \supseteq V=\{v_1,\dots,v_k\}$

$$\text{cone}(V) \triangleq \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i \;\middle|\; \bar{\lambda}=(\lambda_1,\dots,\lambda_k)\geq 0 \right\}$$

תזכורת: $\tilde{y}^t \cdot (0|\tilde{A}|\tilde{b}) = 0^n \circ -1$

כיון ש $0^n \circ -1$ מוכל בחרוט שנפרש ע"י שורות $(0|\tilde{A}|b)$,

מהערה 4 $\Leftarrow$ $0^n\circ -1$ גם בחרוט שנפרש ע"י שורות $(A|b)$.

יהי $y\geq 0$ וקטור המקדמים עבורו $y^t(A|b)=0^n\circ -1$.

y הוא הוקטור המבוקש. $\boxtimes$

גירסה ב ללמה של Farkas

קיים $x\geq 0$ עבורו $Ax=b$ אמ"מ לא קיים וקטור y עבורו $y^tA\geq 0$ & $y^tb<0$.

הוכחה: $P=\{x\geq 0 : Ax=b\} = \{x \mid Ax\leq b,\ -Ax\leq -b,\ x\geq 0\}$

ונגדיר $A'=\begin{pmatrix}A\\-A\\-I\end{pmatrix}$ $b'=\begin{pmatrix}b\\-b\\0\end{pmatrix}$

ואז $P=\{x \mid A'x\leq b'\}$

לפי הלמה של פרקש: $P\neq\emptyset \iff \nexists y\geq 0 : y^tA'=0 \ \&\ y^tb'<0$

$\iff \nexists \alpha,\beta,\gamma\geq 0\ \ (\alpha^t-\beta^t)A-\gamma I=0 \ \&\ (\alpha^t-\beta^t)b<0$

הגדר $y\triangleq\alpha-\beta$

$\iff \nexists y : y^tA\geq 0 \ \&\ y^tb<0$

תוצאה: יהי $P=\{x \mid Ax\leq b\}\neq\emptyset$.

לכל $c\in\mathbb{R}^n$ ולכל $\delta\in\mathbb{R}$:

$\forall x\in P : c^tx\leq\delta$

אמ"מ

$\exists y\geq 0 : y^tA=c^t \ \&\ y^tb\leq\delta$

הוכחה: אם $y\geq 0$, $y^tA=c^t$, וגם $y^tb\leq\delta$ אזי:

$$c^tx = y^tAx \underset{y\geq 0}{\leq} y^tb \leq \delta$$

(I) אם $\mu=0$ אז $Az \geq 0$

$c^t z < 0$

יהי $x^0 \in P$: $A(x^0 - \tau z) \leq Ax^0 \leq b \quad (\tau \geq 0)$

ולכן $\{x^0 - \tau z \mid \tau \in \mathbb{R}^{\geq 0}\} \subseteq P$

אבל $c^t(x^0 - \tau z) = c^t x^0 - \tau c^t z \xrightarrow[\tau\to\infty]{} \infty$

ולכן קיים $x \in P$ עבורו $c^t x > \delta$.

(II) אם $\mu > 0$

$$\left.\begin{array}{l} Az + b\mu \geq 0 \\ c^t z + \delta\mu < 0 \end{array}\right\}$$

נגדיר $x = -\frac{1}{\mu} \cdot z$ ונקבל

$Ax = -\frac{1}{\mu} Az \leq b \quad \& \quad c^t x = -\frac{1}{\mu} c^t z > \delta$

משמע $x \in P$ ומקיים $c^t x > \delta$, כנדרש.

אם אין y כזה משמע למערכת

$$(y^t \ \lambda)\begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (c^t \ \delta)$$

אין פתרון $(y^t \ \lambda) \geq 0$.

לפי הלמה של פרקש, קיים וקטור $\binom{z}{\mu}$

שמקיים $\begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\binom{z}{\mu} \geq 0$

וכן $(c^t \ \delta)\binom{z}{\mu} < 0$

למה $\mu \geq 0$?

נחלק ל 2 מקרים: $\mu = 0$ וכן $\mu > 0$.

משפט הדואליות (גרסה חזקה) [Von Neumann - 47]

$$\max\{c^t x \mid Ax \leq b\} = \min\{y^t b \mid y \geq 0, y^t A = c^t\}$$

אם ב הפוליהדרונים אינם ריקים.

הוכחה: $\delta \triangleq \sup\{c^t x \mid Ax \leq b\}$

$\gamma \triangleq \inf\{y^t b \mid y \geq 0, y^t A = c^t\}$

דואליות חלשה $\Leftarrow$ $\delta \leq \gamma$.

מהגדרת δ: $Ax \leq b \Leftarrow c^t x \leq \delta$.

לפי התוצאה הקודמת, קיים $y \geq 0$ עבורו

$y^t A = c^t \quad \& \quad y^t b \leq \delta$

ולכן $\gamma \leq \delta$, כנדרש.

משפט הדואליות (גרסה חלשה)

$P \triangleq \{x \mid Ax \leq b\}$

$Q \triangleq \{y \mid y \geq 0 \ \& \ y^t A = c^t\}$

לכל $\tilde{x} \in P$ ולכל $\tilde{y} \in Q$ מתקיים:

$c^t \tilde{x} \leq \tilde{y}^t b$

הוכחה:

$$c^t \tilde{x} = (\tilde{y}^t A)\tilde{x} = \tilde{y}^t (A\tilde{x}) \underset{(\tilde{y} \geq 0 \text{ כי})}{\leq} \tilde{y}^t \cdot b$$

הערה: $\left\{\begin{array}{l} Q \text{ פוליהדרון פרימאלי} \\ P \text{ פוליהדרון דואלי} \end{array}\right.$ קצת "מבלבל"

כבר הוכחנו:

$$\exists x : \ Ax \le b \ \& \ c^t x = \delta$$
$$\exists y : \ y \ge 0 \ \& \ y^t A = c^t \ \& \ y^t b = \gamma$$

אפשר גם להוכיח את זה ע"י שימוש בלמה של פרקש...

גרסא נוספת: אם 2 הפוליהדרונים אינם ריקים, אז

$$\max\{ c^t x \mid x \ge 0 , Ax = b \} = \min\{ y^t b \mid y^t A \ge c^t \}$$

נבצע רדוקציה מהצורה הסטנדרטית לצורה $Ax \le b$:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A \\ -A \\ -I \end{pmatrix} \qquad \tilde{b} = \begin{pmatrix} b \\ -b \\ 0 \end{pmatrix}$$

ואז

$$\{ x : Ax = b, \ x \ge 0 \} = \{ x \mid \tilde{A} x \le \tilde{b} \}$$

ולכן גם ה-max של כל אחד שווה.

מסקנה

$$\delta = \max\{ c^t x \mid x \ge 0 , Ax = b \}$$
$$= \max\{ c^t x \mid \tilde{A} x \le \tilde{b} \}$$

$$= \min\{ z^t \tilde{b} \mid z \ge 0, \ z^t \tilde{A} = c^t \}$$

נכתוב: $z = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ ואז

$$z^t \tilde{A} = u^t A - v^t A - w = c^t$$
$$z^t \tilde{b} = u^t b - v^t b = \delta$$

נגדיר $y \triangleq u - v$

$$z^t \tilde{A} = y^t A - w \implies y^t A \ge c^t$$
$$z^t \tilde{b} = y^t b = \delta$$

ולכן

$$\delta = \min\{ y^t b \mid y^t A \ge c^t \}$$