24/3/08

אלגוריתמים ברשתות

דואליות

משפט רופפות משלימה

ראינו שהתכניות

$$P: \quad \min\{c^t x \mid Ax=b,\ x\geq 0\}$$

$$D: \quad \max\{y^t b \mid y^t A \leq c^t\}$$

הן דואליות.

כלומר: אם הפוליהדרונים המתאימים אינם ריקים, אז ערך המינ' המתאים ל P שווה לערך המקס' המתאים ל D.

האם יש שיטה שמסבירה כיצד מתקבלת התכנית הדואלית מתוך התכנית הפרימאלית?

התכנית הדואלית מספקת חסם תחתון

$$P: \quad \min\{c^t x : Ax=b\ ,\ x\geq 0\}$$

נחליף את P בתכנית עם פחות אילוצים:

$$\forall y\in\mathbb{R}^m: \quad g(y) \triangleq \min\{c^t x + y^t(b-Ax) \mid x\geq 0\}$$

נשים לב: 1 $y\in\mathbb{R}^m$, וכל רכיב y_i מצמיד "קנס" להפרת האילוץ $a_i x=b_i$.

2 אם $\exists x\in P$ אז $\forall y\in\mathbb{R}^m: g(y)\leq c^t x$

ולכן אם x^* אופט' ב P אז $\forall y: g(y)\leq c^t x^*$

מסקנה: $\max\{g(y) \mid y\in\mathbb{R}^m\}\leq c^t x^*$

וקיבלנו חסם תחתון לערך התכנית הלינארית, כנדרש.

אבל: מה הקשר בין $\max g(y)$ לבין התכנית הדואלית ?!

$$g(y) = \min_{x\geq 0}\ c^t x + y^t(b-Ax)$$

$$= y^t b + \min_{x\geq 0}\ (c^t - y^t A)x$$

הערה:

$$\min_{x\geq 0}\ (c^t-y^tA)x = \begin{cases} 0 & \text{if } (c^t-y^tA)\geq 0 \\ -\infty & \text{o.w.} \end{cases}$$

העניין שלנו ב $g(y)$ הוא בתנאי חסם תחתון, ולכן

$$\max_{y\in\mathbb{R}^m}\{g(y)\} = \max_{y}\{y^tb + \min_{x\ge0}(c^t-y^tA)x\}$$

$$=\max\{y^tb \mid c^t-y^tA\ge0\}$$

$$=\boxed{\max\{y^tb \mid y^tA\le c^t\}}$$

בנינו את התוכנית הדואלית כך שמתקיים דואליות חלשה.

ההפתעה: החסם התחתון הדוק! (דואליות חזקה).

בניית התוכנית הדואלית עבור $\min\{c^tx \mid Ax\ge b\}$

① נוסיף משתנים כדי לקבל אילוצי שיוויון:

$$Ax\ge b \iff \exists s\in\mathbb{R}^m:\ s\ge0 \ \&\ Ax-s=b$$

② ולכן

$$\min\{c^tx \mid Ax\ge b\} = \min\{\tilde{c}^t\binom{x}{s} \mid \tilde{A}\binom{x}{s}=b,\ s\ge0\}$$

כאשר: $\tilde{c}\triangleq(c|0\cdots0)$ $\quad\tilde{A}\triangleq(A|-I)$

$$g(y)\triangleq\min_{x\ \text{חופשי},\ s\ge0}\left[\tilde{c}^t\binom{x}{s}+y^t\left(b-\tilde{A}\binom{x}{s}\right)\right]$$

$$=y^tb+\min_{x\ \text{חופשי},\ s\ge0}(\tilde{c}^t-y^t\tilde{A})\binom{x}{s}$$

$$=y^tb+\min_{s\ge0,\ x\ \text{חופשי}}\{c^tx-y^t(Ax-s)\}$$

$$=y^tb+\min_{x\ \text{חופשי}}(c^t-y^tA)x+\min_{s\ge0}y^ts$$

נשים לב: $\min_{s\ge0}y^ts=\begin{cases}0 & \text{if } y\ge0\\ -\infty & \text{o.w.}\end{cases}$

$$\min_{x\ \text{חופשי}}(c^t-y^tA)x=\begin{cases}0 & \text{if } c^t-y^tA=0\\ -\infty & \text{o.w.}\end{cases}$$

ולכן $\max g(y)=\max\{y^tb \mid y\ge0\ \&\ y^tA=c^t\}$

סיכום

תוכנית פרימלית	תוכנית דואלית
$\min\{c^tx \mid Ax=b,\ x\ge0\}$	$\max\{y^tb \mid y^tA\le c^t\}$
$\min\{c^tx \mid Ax\ge b\}$	$\max\{y^tb \mid y^tA=c^t,\ y\ge0\}$

הפיכת בעיית מקס' לבעיית מינ' (כפל ב -1)

נניח שהבעיה היא: $P: \max\{c^t x \mid Ax \le b\}$

נגדיר בעיה $P': -\min\{-c^t x \mid Ax \le b\}$

אזי:

① x פיזיבילי עבור $P \iff x$ פיזיבילי עבור P'

② אם x^* אופ' ביחס ל P

$\tilde{x}$ אופט' ביחס ל P' אזי:

$$c^t x^* = c^t \tilde{x}$$

ולכן הבעיות שקולות!

טרנספורמציה דיקדוקית מתכנית פרימלית לדואלית

תכנית פרימלית		תכנית דואלית	
$\min\ c^t x$		$\max\ y^t b$	
s.t.		s.t.	
$a_i x \ge b_i$	$i \in M_1$	$y_i \ge 0$	$i \in M_1$
$a_i x \le b_i$	$i \in M_2$	$y_i \le 0$	$i \in M_2$
$a_i x = b_i$	$i \in M_3$	y_i free	$i \in M_3$
$x_j \ge 0$	$j \in N_1$	$y^t A^j \le c_j$	$j \in N_1$
$x_j \le 0$	$j \in N_2$	$y^t A^j \ge c_j$	$j \in N_2$
x_j free	$j \in N_3$	$y^t A^j = c_j$	$j \in N_3$

בכל תכנית לינארית מתקיימת אחת האפשרויות הבאות.

① קיים פתרון אופטימלי.

② התכנית לא חסומה (בבעית מינ' האופטימום הוא $-\infty$, בבעית מקסימום האופטימום הוא $+\infty$).

③ לא קיים פתרון פיזיבילי.

צירופים אפשריים בבעיה פרימלית/דואלית:

פרימלי \ דואלי	אופ' סופ	לא חסומה	לא פיזיבילית
אופט' סופ.	אפשרי	לא אפשרי.	לא אפשרי.
לא חסומה	לא אפשרי.	לא אפשרי.	אפשרי.
לא פיזיבילית	לא אפשרי.	אפשרי.	לא אפשרי.

טענה: $\text{dual}(\text{dual}(P)) \approx P$

$$\begin{tikzcd}
P \text{ בעיית מינ'} \arrow[r, leftrightarrow, "\text{דואליות}"] \arrow[d, leftrightarrow, "\text{כפל ב }(-1)"'] & D=\text{dual}(P) \text{ בעיית מקסימיזציה} \arrow[d, leftrightarrow, "\text{כפל ב }(-1)"] \\
\text{dual}(P') \text{ בעיית מקס' שקולה} \arrow[r, leftrightarrow, "\text{דואליות}"] & P' \text{ בעיית מינימיזציה שקולה ל-}D
\end{tikzcd}$$

הרחבות:

① $Ax \ge b \implies \begin{cases} Ax - s = b \\ s \ge 0 \end{cases}$

② x free $\implies \begin{cases} x = x^+ - x^- \\ x^+, x^- \ge 0 \end{cases}$

③ מחיקת שורות תלויות ב $(A|b)$.

דואליות חלשה (תכניות בצורה כללית)

אם x פתרון פיזיבילי של תכנית פרימלית P

ו y פתרון פיזיבילי של תכנית דואלית D

אז

$$c^t x \ge y^t b$$

<u>הוכחה:</u>

$$u_i \triangleq y_i(a_i x - b_i) \qquad i=1..m$$

$$v_j \triangleq (c_j - y^t A^j)\cdot x_j \qquad j=1..n$$

לפי הגדרת דואליות:

$$y_i \ge 0 \Leftarrow a_i x \ge b_i$$

$$y_i \le 0 \Leftarrow a_i x \le b_i$$

y_i חופשי $\Leftarrow a_i x = b_i$

ולכן $u_i \ge 0$ ובאותו אופן $0 \le v_j$.

$$\sum_i u_i = \sum_i y_i(a_i x - b_i) = (y^t A)x - y^t b$$

$$\sum_j v_j = \sum (c_j - y^t A^j)x_j = c^t x - (y^t A)x$$

$$0 \le \sum_i u_i + \sum_j v_j = c^t x - y^t b \qquad \boxtimes$$

Complementary Slackness

אם x ו-p פתרונות פיזיבליים לתכנית פרימלית ודואלית, בהתאמה, אז:

x ו-p פתרונות אופטימליים אמ"מ

$$\begin{cases} \forall i & p_i(a_i \cdot x - b_i) = 0 \\ \forall j & (c_j - p^t A^j)x_j = 0 \end{cases}$$

<u>הוכחה:</u> אם x, p אופט׳, אז לפי דואליות חזקה $c^t x = p^t b$. ולכן $\sum u_i + \sum v_j = 0$.

אם $\sum u_i + \sum v_j = 0$, אז $c^t x = p^t b$, ומדואליות חלשה נובע אופט׳.