תזכורת

משפט: (ביחס לצורה סטנדרטית)

x^* פתרון בסיסי אמ״ם $Ax^*=b$ וכן יש m אינדקסים $\{B(i)\}_{i=1}^{m}$ המקיימים:

① העמודות $\{A^{B(i)}\}_{i=1}^{m}$ בת״ל.

וכן ② $i \notin \{B(1),\dots,B(m)\} \Longrightarrow x^*_i = 0$

למטריצה $B \triangleq (A^{B(1)},\dots,A^{B(m)})$ קוראים מטריצת הבסיס.

אם x^* הוא bfs לא מנוון, אז $\{B(1),\dots,B(m)\} = \{i \mid x^*_i \neq 0\}$ וקל לזהות את B.

איך מוצאים פתרון דואלי אופ׳ בהינתן פרימלי אופ׳?

נניח: $P: \quad \min\{c^t x \mid Ax=b,\ x\geq 0\}$

$D: \quad \max\{y^t b \mid y^t A \leq c^t\}$

ונניח: x^* הוא פתרון אופטימלי עבור P.

האם כבר עכשיו נמצאת y^* אופטימלי עבור D?

תשובה: כן בתנאי ש-

1) x^* הוא פתרון בסיסי פיזבילי.

וגם 2) x^* הוא פתרון לא מנוון

(בדיוק $n-m$ אפסים ב-x^*)

הסבר: אם נתעקש על תזוזה רק בכיוון בסיסי, אז x^* הפתרון היחיד למערכת $B\tilde{x}^*=b$.

ננסה לזוז בכיוון d תזוזה קטנה. נבחר $\theta>0$.

כדי ש-$x+\theta d$ יהיה פרימל פיזבל צריך

$$\begin{cases} b = A(x+\theta d) = \underbrace{Ax}_{=b} + \theta A d \\ x+\theta d \geq 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} Ad = 0 \\ \forall\ i\in \text{basis}:\quad x_i+\theta d_i \geq 0 \end{cases}$$

שים לב: $i\in \text{basis} \Leftarrow x_i \gneq 0$. ולכן עבור $0<\theta$ מספיק קטן נקבל בהכרח: $x_i+\theta d_i \geq 0$.

נתמקד עכשיו בדרישה $Ad=0$:

$$0 = Ad = B\cdot\tilde{d} + A_j \Longrightarrow \tilde{d} = -B^{-1}\cdot A_j$$

נסמן: $\tilde{x}^* =$ הטלת x^* על הקואורדינטות של הבסיס.

ונקבל $Ax^*=b \Leftarrow B\tilde{x}^*=b$ (כי מחוץ לבסיס כל רכיבי x שווים 0)

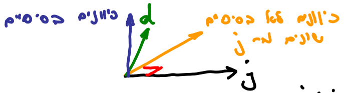
נגדיר $y^t \triangleq \tilde{c}^t\cdot B^{-1}$.

טענה: y הוא פתרון דואלי פיזבילי ($y^tA\leq c^t$).

הוכחה: כהה לרעיון שעומד מאחורי אלגוריתם הסימפלקס.

מה קורה אם? יהי x פתרון בסיסי פיזבילי (לאו דווקא אופ׳) ורוצים לנסות לעבור לפתרון יותר טוב או לעצור (כי x אופ׳).

נניח ש-x אינו מנוון. משמע כדי "לזוז" מ-x צריך לבחור רכיב j (שאינו בסיסי) ולחשב וקטור d המקיים $d_j=1$ וגם $d_i=0$ לכל כיוון לא בסיסי $i\neq j$.



הגדרה: הכיוון הבסיסי ה-j הוא הוקטור d המקיים

$$\begin{cases} \tilde{d} = -B^{-1} \cdot A_j \\ \forall i \notin \text{basis} \ \& \ i \neq j : \ d_i = 0 \end{cases}$$

כעת נשאלת השאלה: האם כדאי לנוע מ-x בכיוון הבסיסי ה-j?

התשובה: כדאי רק אם $c^t x > c^t (x + \theta d)$

כלומר, רק אם $c^t d < 0$. אבל $c^t d = \tilde{c}^t \tilde{d} + c_j$

$= \tilde{c}^t \cdot (-B^{-1} A_j) + c_j$

(עד כאן דיון בסימפלקס.)

נזכור x^* הוא אופטימלי, ולכן $c^t d \geq 0$, משמע, לכל $j \notin \text{basis}$

$$0 \leq c^t d = \tilde{c}^t(-\vec{B}A_j) + c_j = -y^t \cdot A_j + c_j \Rightarrow y^t A_j \leq c_j$$

נותר להוכיח שלכל $j \in \text{basis}$: $y^t A_j \leq c_j$.

אבל $y^t A_j = \tilde{c}^t \cdot B^{-1} \cdot A_j \underset{\substack{\uparrow \\ \text{עמודה ב-B } A_j}}{=} \tilde{c}^t (0 \cdots e_j \cdots 0) = c_j$.

טענה: $y^t = \tilde{c}^t B^{-1}$ הוא פתרון אופטימלי לתכנית הדואלית

הוכחה: $y^t b = \tilde{c}^t B^{-1} b = \tilde{c}^t \cdot \tilde{x}^* = c^t x^*$

אפליקציה: asset pricing

n נכסים.

m מצבים סופיים אפשריים.

r_{si} = שווי נכס i במצב s.

$(r_{1i}, \ldots, r_{mi})$ - וקטור המתאר שווי הנכס i בכל המצבים.

$$R = \begin{array}{c} \text{נכסים} \\ \boxed{\begin{array}{cc} & n \\ & \\ & m \end{array}} \end{array} \text{מצבים} \quad . \ R = [r_{ij}]$$

X_i - כמות נכס i.

$X = (x_1, \ldots, x_n)$ - וקטור אחזקות (לא כל הרכיבים חיוביים!)

שווי האחזקות x במצב s הוא

$$w_s \triangleq \sum_{i=1}^{n} r_{si} \cdot x_i = r_s \cdot x$$

הוקטור w: $w = R x$

מתאר שווי האחזקות בכל מצב.

p - וקטור מחירי הנכסים בהתחלה.

p_i - מחיר הנכס ה-i.

רכישת האחזקות x עולה $p^t x$.

השאלה: בהינתן R, מה צריך להיות p?

הכלל התשובה הוא: היעדר ארביטראז'!

"לא ניתן להרוויח בבטחון מהשקעה שלילית".

$$Rx \geq 0 \implies p^t x \geq 0$$

<u>משפט:</u> התנאי "העדר ארביטראז'" מתקיים אמ"מ

$$\exists\, q=(q_1, \dots, q_m) \geq 0 : \quad p^t = q^t R$$

<u>הוכחה:</u> אין ארביטראז' $\iff \{\neg \exists x : Rx \geq 0 \;\&\; p^t x < 0\}$

(למה של פרקש) $\iff$ יש פתרון $q \geq 0$ למערכת $q^t R = p^t$.

$\boxtimes$