

# Complementary Slackness

אם  $x$  ו- $p$  פתרונות פרימליים ודואליים בהתאמה, אז:

$$\begin{cases} \forall i: p_i (a_i \cdot x - b_i) = 0 & \text{תנאי הרופות בוגלים} \\ \forall j: (c_j - p^t A^j) x_j = 0 & \text{תנאי הרופות פרימליים} \end{cases}$$

## הערות

① אם התכנות הפרימלי היא בצורה סטנדרטית, כלומר  $\min \{c^t x \mid Ax=b\}$ , אז תנאי הרופות הבוגלים מתבטאים עם  $x$  פרימליים.

27/3/08 אלקטרוניקה בסיסית

complementary slackness - שימוש ב-  
primal-dual פיתוח אלקטרוניקה

② אם התכנות הפרימלי אינה בצורה סטנדרטית, אז תנאי הרופות בוגלים אומרים:  $a_i x \neq b_i \Rightarrow p_i = 0$

③ אם התכנות הפרימלי היא בצורה סטנדרטית,  $x^*$  פתרון אופטימלי בסיסי. ורק  $x^*$  עם מטלון  $x^*$  תנאי הרופות משלמה מאפשרים לעצומה פתרון בוגלים אופטימלי? כיצד?

תהי  $B$  מטכניקה הבסיס המתאימה עם  $x^*$ .

$$\min \{c^t x \mid Ax=b, x \geq 0\}$$

$$\max \{y^t b \mid y^t A \leq c^t\}$$

אם  $j$  הוא טיפוקס בבסיס, אז  $x_j > 0$  (אין ניון) ולכן  $y^t A^j = c_j$

לפי  $y^t \cdot B = c_B$  (כאשר  $c_B$  הינה  $c$  עם יציב הבסיס)

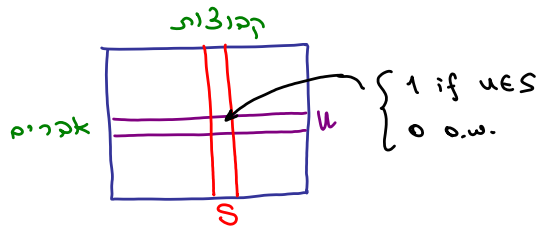
$$\boxed{y^t = c_B \cdot B^{-1}}$$

פרימלי, ולכן אם  $y$  הוא בוגלים פרימלי אז הוא גם אופטימלי.

דמה  $y$  הוא בוגלים פרימלי?

complementary slackness      עניני גזע

Weighted Set Cover      עניני גזע  
 $\min \{ c^t x \mid \forall u: \sum_{S: u \in S} x(S) \geq 1, x \geq 0 \}$



עניני גזע  
 (עניני גזע)

עניני גזע

$$\max \{ \sum_u y(u) \mid y \geq 0, \forall S: \sum_{u \in S} y(u) \leq c(S) \}$$

עניני גזע

$$\forall S: x(S) \cdot (c(S) - \sum_{u \in S} y(u)) = 0$$

$$\forall u: y(u) \cdot (\sum_{S: u \in S} x(S) - 1) = 0$$

עניני גזע

עניני גזע

$$\forall S: x(S) = 0 \quad \text{or} \quad \frac{1}{\alpha} c(S) \leq \sum_{u \in S} y(u) \leq c(S)$$

$$\forall u: y(u) = 0 \quad \text{or} \quad 1 \leq \sum_{S \ni u} x(S) \leq \beta$$

עניני גזע  
 $c^t x \leq (\alpha\beta) \cdot y^t \cdot \mathbf{1}$

$$c^t x \leq \alpha\beta \cdot \text{opt}(\text{primal})$$

עניני גזע

$$c^t x \leq (\alpha\beta) y^t \mathbf{1} \leq (\alpha\beta) \cdot c^t x^*$$

עניני גזע

עניני גזע

$$c^t x = \sum_S c(S) x(S)$$

$$\leq \sum_S (\alpha \sum_{u \in S} y(u)) x(S)$$

$$= \alpha \sum_u y(u) (\sum_{S: u \in S} x(S))$$

$$\leq \alpha \sum_y y(u) \cdot \beta = (\alpha\beta) y^t \cdot \mathbf{1}$$

עניני גזע

עניני גזע

עניני גזע

$$\deg(u) \triangleq |\{S: u \in S\}|$$

עניני גזע

$$f \triangleq \max_u \deg(u)$$

עניני גזע

$$S_{i_1} \cup \dots \cup S_{i_k} = U$$

$$\sum_{i=1}^k c(S_{i_j}) \leq f \cdot \text{opt}(\text{weighted set cover})$$

עניני גזע

תנאי התאמה

(Primal-Dual)

① איתנות:  $x \leftarrow 0, y \leftarrow 0$ .  
 [תקיים תנאי הופנה מוגדר (f, f) מוגדרים!] !

②  $x$  ו- $y$  אינן סומות בקבוצות שבה:

(\*) בהינתן  $\tilde{u}$  שאין מנסה.  
 (ב)  $\delta \triangleq \min_{s: \tilde{u} \in S} \{c(s) - \sum_{u \in S} y(u)\}$   
 (ג)  $y(\tilde{u}) \leftarrow y(\tilde{u}) + \delta$

(ג)  $f$  -  $S$  שבה  $S$  שמהיבנה  $\delta$  כסומ.  $x$   
 $\forall s: c(s) - \sum_{u \in S} y(u) = 0 \Rightarrow x(s) \leftarrow 1$   
 ③ התהי  $x$ .

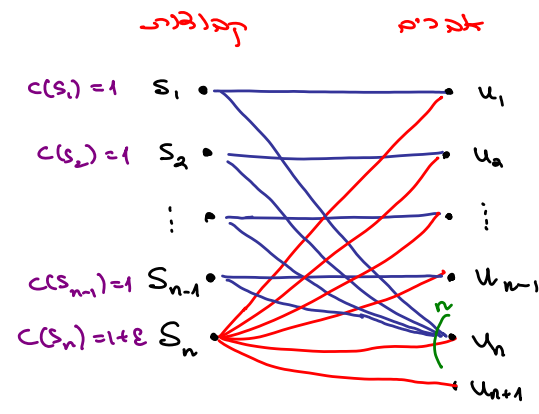
תנאי הופנה מוגדר (1, f) מוגדרים:  
 $\forall s: x(s) = 0$  או  $\sum_{u \in S} y(u) = c(s)$   
 $\forall u: y(u) = 0$  או  $1 \leq \sum_{s \in u} x(s) \leq f$

מילוי:

$S$  הבקרה אם  $c(s) = \sum_{u \in S} y(u)$   
 הכללים:  
 ①  $x$  וקטור בינארי  $x \in \{0, 1\}^n$

①  $S$  בהיסוי  $(x(s)=1)$  שם  $S$  הבקרה.  
 ② אם  $0 < y(u)$  אז  $u$  מנסה  $\delta$  היגד  $f$  קבוצות.  
 קיום תנאי הופנה מוגדרים (1, f) מוגדרים  $\Leftrightarrow$  תנאים ①+②

בנייה



כמהן הכסומ.  
 המושל הוא  $\{S_n\}$   
 ומשקל  $1 + \epsilon$ .  
 מה עליה היגד?  
 פתרון:

בהינתן  $u_n$  ומשקל  $1 - \delta$ .  
 אז  $S$  הקבוצות  $S_1, \dots, S_{n-1}$  שמהיבנה  $\delta$  כסומ.  
 אז בהינתן  $u_{n+1}$  ומשקל  $y(u_{n+1}) - \delta - \epsilon$ , אז  $S_n$   
 שמהיבנה ומשקל  $\delta$  כסומ. מה היגד?  
 $n = f \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \frac{n + \epsilon}{1 + \epsilon}$

דוגמה: בתחילת  $\delta$  היגד  $\delta$  הכסומה מוגדרים:

①  $y$  הוא פתרון גורף פנימי.  
 ②  $x = y - 1$  מוגדרים תנאי הופנה מוגדרים (1, f) מוגדרים.

דוגמה: המושל  $\delta$  הוא  $f$ .  
מסקנה: בסופו המושל  $x$  הוא  $f$ -דוקטור.

מה כמה היגד מוגדרים?