אלגוריתמים ברשתות - 28/1/08

- זרימה מקסימום ברשתות

סקירה של אלגוריתמים (Dinitz, Edmonds & Karp)

- שימושים של זרימה מקסימום

שידוך מקסימום בגרף דו-צדדי

כיסוי צמתים מינימום בגרף דו צדדי

- מבוא לאלגוריתם push-relabel של Goldberg & Tarjan

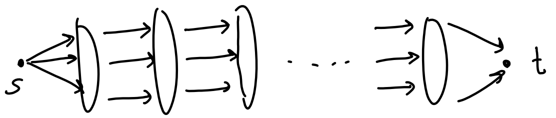
אלגוריתמים לזרימה מקסימום המבוססים על מסלולי שיפור

1) מסלול שיפור קצרים: בכל איטרציה מצא מסלול הרחבה קצר ביותר.

1972: Edmonds & Karp הראו שהפעלת הכלל הנ"ל מבטיחה $O(n\cdot m)$ איטרציות לכל היותר.
כל איטרציה ממומשת בזמן $O(m)$, ולכן זמן הריצה הכולל הוא $O(n\cdot m^2)$. כיון ש-$m=O(n^2)$ נקבל זמן ריצה $O(n^5)$.

אלגוריתמים לזרימה מקסימום המבוססים על מסלולי שיפור

1) מסלול שיפור קצרים: בכל איטרציה מצא זרימה מקסימלית שאורכת מסלולים קצרים ביותר בגרף השיורי.



* גרף שכבות בגרף השיורי.
* כל הקשתות בעלות קיבול $r_f(e)>0$.
* כל המסלולים מהמקור לבור הם הקצרים ביותר.

הרעיון הוצג וניתח ע"י דיניץ.

אלגוריתמים לזרימה מקסימום המבוססים על מסלולי שיפור

Dinitz 1970: הוכיח שמס' האיטרציות חסום ע"י n (כי מספר השכבות עולה מאיטרציה לאיטרציה).

בכל איטרציה:

בונה גרף שכבות (BFS בזמן $O(m)$).
מחשב זרימה מקסימלית (בזמן $O(m\cdot n)$).
ולכן זמן ריצה $O(m\cdot n^2)=O(n^4)$.

אנחנו נמצא אלג' שאינו מבוסס על מסלולי שיפור בעל סיבוכיות $O(n^3)$ ובעל תכונות מעניינות אחרות.

שימושים בזרימה מקסימום

שידוך מקסימום בגרף דו צדדי

מושגים:

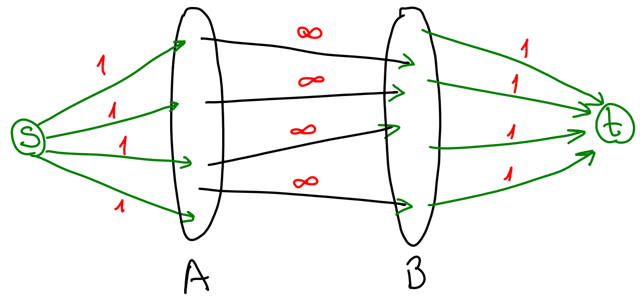
גרף דו-צדדי: $G=(V,E)$ הוא גרף דו צדדי אם ניתן לחלק את V ל-2 קבוצות זרות $V=A\cup B$ כך שכל הקשתות מקיימות $E\subseteq A\times B$.

שידוך: $F\subseteq E$ היא שידוך אם כל צומת נשען על לכל היותר קשת אחת של F.

שידוך מקסימום: $F\subseteq E$ היא שידוך מקסימום אם לכל שידוך $F'\subseteq E$ מתקיים $|F|\geq|F'|$.

טענה: ניתן לחשב שידוך מקסימום בגרף דו צדדי ע"י פתרון של בעיית זרימה מקסימום.

הוכחה:



התאמה חח"ע:

זרימות בשלמים $\longleftrightarrow$ שידוכים

מקיימת כמות זרימה = גודל השידוך. $\square$

3/4 שימוש: כיסוי צמתים מינימום בגרף דו צדדי

כיסוי צמתים: $U\subseteq V$ הוא כיסוי צמתים של קשתות הגרף $G=(V,E)$ אם לכל $(v,w)\in E$ מתקיים $U\cap\{v,w\}\neq\emptyset$.

משפט König: בכל גרף דו צדדי גודל שידוך מקסימום שווה לגודל כיסוי קטן ביותר בצמתים.

הוכחה: נסמן M^* - שידוך מקסימום.

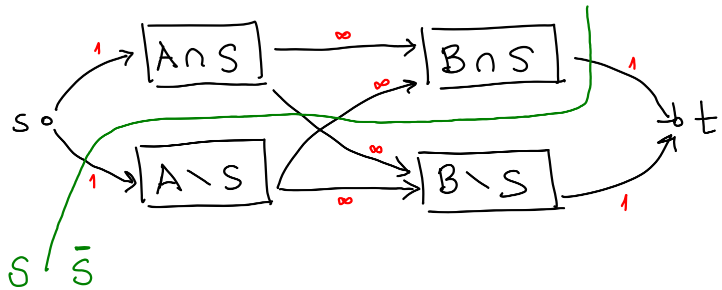
C^* - כיסוי מינימום בצמתים.

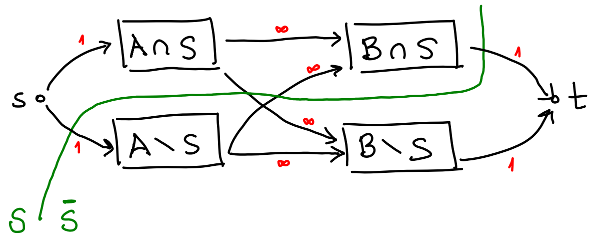
צ"ל $|M^*|=|C^*|$.

הכיוון הקל: $|C^*|\geq|M^*|$.

הכיוון הקשה: $|C^*|\leq|M^*|$. התאמנו לגרף רשת זרימה שבה זרימה המקסימום f^* מקיימת $|f^*|=|M^*|$.

נפעיל את משפט חתך מינ' = זרימה מקס' למציאת חתך S שמקיים $c(S)=|f^*|$:





החתך $\delta(S)$ מכיל 3 סוגי קשתות:

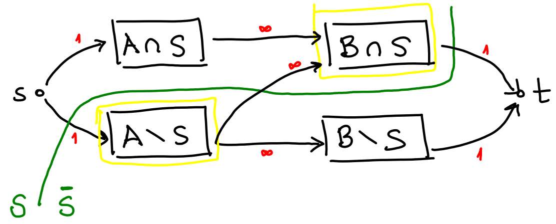
(1) קשתות $s \to a$ עבור $a \in A \setminus S$. קיבול 1

(2) קשתות $b \to t$ עבור $b \in B \cap S$ קיבול 1

(3) קשתות $a \to b$ עבור $a \in A \cap S$, $b \in B \setminus S$. קיבול ∞

$c(S) < \infty$, ולכן אין קשתות מסוג (3).

$$\Leftarrow \quad |M^*| = |f^*| = c(S) = |A \setminus S| + |B \cap S|$$



$$\Leftarrow \quad |M^*| = |f^*| = c(S) = |A \setminus S| + |B \cap S|$$

אבל $U = (A \setminus S) \cup (B \cap S)$ הוא כיסוי בצמתים!

ולכן $|M^*| = |U| \geq |C^*|$, כנדרש.

הערות: ① ההוכחה גם מספקת אלג' למציאת C^*.

② מקרה נוסף של דואליות!

מבוא לאלגוריתם של Goldberg & Tarjan

מושגים:

עודף זרימה: שנכנס לצומת v (excess flow).

$$e(v) \triangleq \sum_{u \in V} f(u,v)$$

(בזרימה חוקית, $e(v) = 0$ לכל $v \in V \setminus \{s,t\}$.)

קדם זרימה (preflow): $f : V \times V \to \mathbb{R}$

מקיימת: אילוצי קיבול, אנטי-סימטריות, ועודף זרימה אי-שלילי:

$$\forall v \in V \setminus \{s\} : \quad e(v) \geq 0$$

קשת שיורית: זוג צמתים (v,w) המקיימים $r_f(v,w) > 0$.

עקרונית

שאלה: האלגוריתם מחשב קדם זרימה אשר תמיד מהווה חתך כלשהו בגרף.

האלג' מנסה "לתקן" את קדם-הזרימה כדי שתהפוך לזרימה חוקית (תקיים גם את אילוצי שימור הזרימה).

אם הזרימה חוקית, אז היא מקסימום (כי יש חתך רווי).

2 סוגי תיקונים:

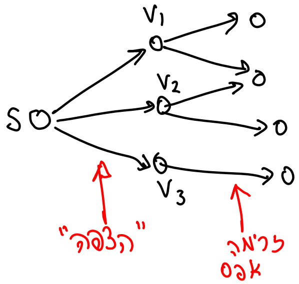
(1) המשך הזרמה לכיוון הבור (אופטימי)

(2) החזר זרימה למקור (פסימי).

קדם זרימה $\forall v \neq s: \quad e(v) \triangleq \sum_{u\in V} f(u,v) \geq 0$

דוגמא:

$$f(u,v) = \begin{cases} c(u,v) & \text{if } u=s \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



נשים לב: קדם-הזרימה מרווה את כל קשתות $\delta(\{s\})$.

דוגמא:

אם f היא קדם-זרימה שמציפה את $\delta(\{s\})$, נגדיר $d(v) = \begin{cases} n & \text{if } v=s \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$.

נשים לב שלכל w: $r_f(s,w)=0$, ולכן d היא פונקציית תוויות חוקית.

תוויות חוקיות

נתונה רשת N, f קדם זרימה, ורשת שיורית N_f.

פונקציה $d: V \rightarrow \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ נקראת פונקציית תוויות אם:

① $d(s)=n$ (s הוא המקור)

② $d(t)=0$ (t הוא הבור)

③ $\forall v,w \in V: \quad r_f(v,w) > 0 \Rightarrow d(v) \leq d(w)+1$

תנאי ③ מבטיח "מסלולים קצרים" מ-s ל-t.

תזכורת: $\left[\, d(v) \le d(w)+1,\ d(t)=0,\ d(s)=n \,\right]$

סימון: $d_{N_f}(v,w) \triangleq$ המרחק בין v ל w בגרף המושרה ע"י הקשתות השיוריות.

טענה 1:

(1) $\forall v: \quad d(v) \le d_{N_f}(v,t)$

(2) $\forall v \quad d_{N_f}(s,v) \ge n - d(v)$

$d_{N_f}(v,s) \ge d(v) - n$

(3) $\forall v \quad d(v) \ge n \Rightarrow d_{N_f}(v,t) = \infty$

טענה 2: אם f קדם זרימה ו-d פונקציית תוויות תקינית, אזי קיים חתך שרווי ביחס ל-f.

תזכורת - הוכחת טענה 1:

① נסתכל במסלול קצר ביותר מ-v ל t ב N_f

$$v=v_0 \to v_1 \to \cdots \to v_{k-1} \to v_k = t$$

כמובן, $d(t)=0$, ולכן

$d(v_{k-1}) \le 1$

$d(v_{k-2}) \le 2$

$\vdots$

$d(v_0) \le k$

② נסתכל במסלול קצר ביותר מ-s ל-v:

$$d(s)=n \quad s=v_0 \to v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_{k-1} \to v_k = v$$

$$d(v_i) \le 1 + d(v_{i+1}) \Longrightarrow n \le k + d(v_k)$$