Note Title 11/1/2006

31/1/08 אלגוריתמים ברשתות

אלגוריתם push-relabel למציאת זרימה מקסימום של Goldberg & Tarjan

"A new approach to the maximum-flow problem", JACM, 33:4, Oct. 1988

צומת אקטיבי

$$\left.\begin{array}{l} v \in V \setminus \{s,t\} \\ e(v) > 0 \\ d(v) < \infty \end{array}\right\}$$

f - קדם זרימה

d - פונקצית תוויות

איתחול

① קדם זרימה שמרוויה את $\delta(\{s\})$.

② פונקצית תוויות פשוטה:

$$d(s) = n \quad , \quad \forall v \neq s : \; d(v) = 0$$

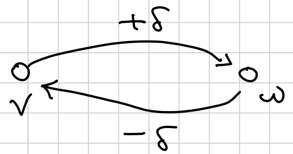
push (v, w)

applicability : v active, $r_f(v,w) > 0$, $d(v) = 1 + d(w)$

action : $\delta \triangleq \min\{e(v), r_f(v,w)\}$

$$f(v,w) \leftarrow f(v,w) + \delta \; ; \; f(w,v) = f(w,v) - \delta$$

$$e(v) \leftarrow e(v) - \delta \; ; \; e(w) \leftarrow e(w) + \delta$$



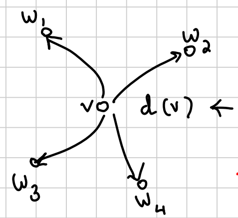
relabel (v)

applicability : v active and

$\forall w : r_f(v,w) > 0 \Longrightarrow d(v) \leq d(w)$

action : $d(v) \leftarrow 1 + \min\{d(w) \mid r_f(v,w) > 0\}$

הערה: $\infty = \min \emptyset$



$d(v) \leftarrow 1 + \min\{d(w_1), d(w_2), d(w_3), d(w_4)\}$

זוהי התווית הגבוהה ביותר ש-v יכול לקבל !

האלגוריתם

① איתחול: f מציפה $\delta(\{s\})$, d פונק' תוית פשוטה.

② כל עוד קיימת פעולת דחיפה או עדכון תוית שניתן לבצע:
בצע את הפעולה.

③ החזר את f.

שמורה
{ f היא קדם זרימה
{ d היא פונק' תוית חוקית ביחס ל-f

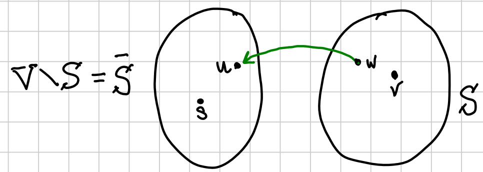
דחיפה מרווה: פעולת דחיפה $push(v,w)$ היא מרווה אם אחריה $r_f(v,w)=0$.

הערות!

① אם f קדם זרימה, d פונק' תוית חוקית ביחס ל-f, ו-v צומת פעיל אזי או שניתן לדחוף זרימה מ-v לצומת אחר ($push(v,w)$), או שניתן לעדכן את $d(v)$ (כלומר $relabel(v)$).

למה 3.5 אם f קדם זרימה וכן $e(v)>0$ אזי $dist_{N_f}(v,s) < \infty$.

הוכחה נסמן $S \triangleq \{w \mid dist_{N_f}(v,w) < \infty\}$.
נניח בשלילה $s \notin S$.



$w \in S \ \& \ u \notin S$
$\Downarrow$
$r_f(w,u)=0$
$\Downarrow$
$f(u,w) \leq 0$ ⊛

$\forall w \neq s: e(w) \geq 0$

$$0 \leq \sum_{w\in S} e(w) = \sum_{w\in S}\sum_{u\in V} f(u,w)$$

$$\overset{\text{(אנטי סימטריות)}}{=} \sum_{w\in S}\sum_{u\notin S} f(u,w) \overset{⊛}{\leq} 0$$

ולכן $\forall w\in S: e(w)=0$, ובפרט עבור $v\in S$, וסתירה. □

אם האלג' עוצר, ובעצירתו $\forall v: d(v)<\infty$, אזי מובטח לנו:

① f היא זרימה חוקית.

② אין מסלול שיפור ב-N_f מ-s ל-t.

ולכן f היא זרימה מקסימום.

מכאן, שכדי להוכיח נכונות מספיק להראות:

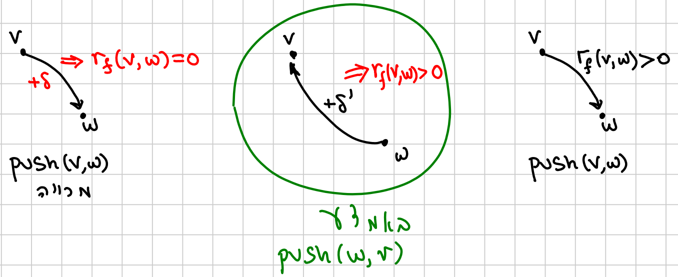
① האלג' עוצר.

② בעצירתו, כל התויות סופיות.

למה 3.9 מספר פעולות הדחיפה המרוות $\le 2\cdot n\cdot m$

הוכחה: קבע זוג צמתים $v\,w$. נוכיח שמס' הדחיפות המרוות מסוג $push(v,w)$ או $push(w,v)$ חסום ע"י $2n-1$.

עובדה: בין כל 2 פעולות $push(v,w)$ מרוות יש פעולת $push(w,v)$ לא בהכרח מרווה.



הערות

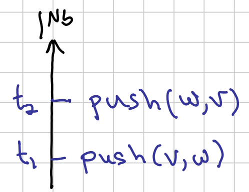
① התוית של כל צומת אינה יורדת במהלך האלג'. בפרט, הפעולה $relabel(v)$ מגדילה את $d(v)$.

② במהלך ריצת האלג': $\forall v:\ d(v) \le 2n-1$

הוכחה: הראינו $dist_{N_f}(v,s) \ge d(v)-n$.
נסתכל על ההצבה האחרונה של $d(v)$ ע"י פעולת $relabel$. בעת ההצבה התקיים $e(v)>0$ ולכן $dist_{N_f}(v,s)<\infty$, ולכן $dist_{N_f}(v,s)\le n-1$. □

מסקנה: לכל v, מספר פעולות $relabel \le 2n-1$.
סה"כ מס' פעולות $relabel \le (n-2)(2n-1) < 2n^2$.

דוגמה:



אזי

$$d_{t_1}(v) = 1 + d_{t_1}(w)$$

$$d_{t_2}(w) = 1 + d_{t_2}(v) \ge 1 + d_{t_1}(v) = 2 + d_{t_1}(w)$$

ולכן

$$d_{t_2}(v) + d_{t_2}(w) \ge 2 + d_{t_1}(v) + d_{t_1}(w)$$

סימון:

* $t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_k$ סדרת הזמנים שבהם בוצעה פעולת $push(v,w)$ מרווה או $push(w,v)$ מרווה.

* $d_{t_i}(v) =$ ערך התוית $d(v)$ בזמן t_i.

עובדה: לכל $1 \le i < k$

$$d_{t_{i+1}}(v) + d_{t_{i+1}}(w) \ge 2 + d_{t_i}(v) + d_{t_i}(w)$$

נקבל $d_{t_{i+1}}(v) + d_{t_{i+1}}(w) \ge 2 + d_{t_i}(v) + d_{t_i}(w)$,

ולכן $d_{t_k}(v) + d_{t_k}(w) \ge (k-1) \times 2 + d_{t_1}(v) + d_{t_1}(w)$.

בדחיפה המרווה הראשונה: $d_{t_1}(v) + d_{t_1}(w) \ge 1$.

בדחיפה המרווה האחרונה: $d_{t_k}(v) + d_{t_k}(w) \le (2n-1) \times 2 - 1$.

ולכן $4n-3 \ge 2k-2+1$

$\Leftarrow$ $2n-1 \ge K \triangleq$ מס' פעולות דחיפה מרוות לאורך (v,w) או (w,v) .

$(v,w) \in E$ או $(w,v) \in E$ גורר שמס' דחיפות מרוות $\le 2nm$. □

נקודות להבהרה:

① איפה טמון בהוכחת למה 3.9 מגביל על החסם לדחיפות מרוות?

② איך נחסום דחיפות לא מרוות?

$$\xrightarrow{e(v)} v \xrightarrow{r_f(v,w)} w \qquad e(v) < r_f(v,w)$$

דחיפה לא מרווה היא טובה כי מזרימה זרימה במורד והופכת צמתים "גבוהים" ללא פעילים.

זרימות מרוות "מקלקלות" תכונה זו, אבל אין הרבה.

למה 3.10 מס' פעולות הדחיפה הלא מרוות $\le 4n^2m$

הוכחה: נגדיר פונקצית פוטנציאל

$$\Phi \triangleq \sum \{ d(v) \mid v \text{ פעיל} \}$$

איך משפיעות הפעולות על Φ?

דחיפה לא מרווה $push(v,w)$:

$$\Phi_{\text{חדש}} \le \Phi_{\text{ישן}} - d(v) + d(w)$$

$$\le \Phi_{\text{ישן}} - 1$$

לכן, כל דחיפה לא מרווה מורידה את Φ!

דחיפה מרווה $push(v,w)$:

$$\Phi_{\text{חדש}} \le \Phi_{\text{ישן}} + d(w)$$

$$\le \Phi_{\text{ישן}} + 2n-1$$

מס' דחיפות מרוות $\le 2nm$.

$\Leftarrow$ סה"כ התרומה ל-Φ בגלל דחיפות מרוות חסום ע"י $2nm \times (2n-1)$.

כל פעולת relabel(v):

$$\phi_{\text{חדש}} \le \phi_{\text{ישן}} + d_{\text{חדש}}(v) - d_{\text{ישן}}(v)$$

$$\le \phi_{\text{ישן}} + 2n-1$$

ולכן סה"כ התרומה ל-ϕ ע"י פעולות $\{relabel(v)\}_{v\in V}$ חסום ע"י $(2n-1)(n-2)$.

סיכום:

פעולות	סה"כ שינוי ב-ϕ
דחיפה לא מרווה	-1
דחיפות מרוות	$+(2n-1)\times 2nm$
פעולות relabel	$+(2n-1)(n-2)$

$$\left.\begin{array}{l} \phi_{\text{התחלה}} = 0 \\ \phi_{\text{סוף}} = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

מס' דחיפות לא מרוות $\le (2n-1)\cdot 2nm + (2n-1)(n-2)$

$$\le 4n^2 m$$

$\square$