7/2/08 אלגוריתמים ברשתות -

א)
- מימוש אלג' push-relabel
- השגת זמן ריצה $O(n^3)$

ב)
- זרימה מקס' עם חסמים תחתונים.
- "זרימה מינימום = חתך מקסימום"

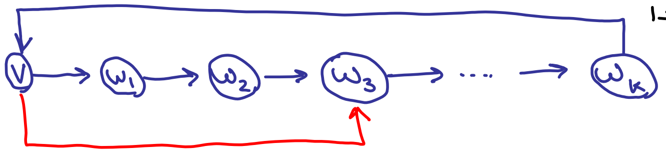
מימוש אלגוריתם push-relabel

גרף תשתית: יהי $G=(V,E)$ גרף מכוון. גרף התשתית של G הוא גרף לא מכוון $\tilde{G}=(V,\tilde{E})$ שבו
$\{v,w\}\in\tilde{E} \iff v\to w\in E$ או $w\to v\in E$

נקרא ונאמר $\{v,w\}$ קשת לא מכוונת ב G.

לכל קשת לא מכוונת $\{v,w\}$ נחזיק 3 ערכים: $c(v,w)$, $c(w,v)$, $f(v,w)$ [שווה ל $-f(w,v)$].

לכל צומת v נחזיק רשימת הקשתות הלא מכוונות שמכילות אותו



קשת נוכחית (מועמדת לבדיקה)

אם v פעיל, בודק האם ניתן לדחוף זרימה לאורך הקשת הנוכחית. אחרת, מקדם את הקשת הנוכחית.
אם מגיע לסוף הרשימה, מעדכן תוית של v, והקשת הנוכחית מצביעה לשכן הראשון w_1.

נדון בתחזוקת קבוצת הצמתים הפעילים בהמשך.

Push/Relabel(v) [v צומת פעיל]

1) תהי $\{v,w\}$ הקשת הנוכחית ברשימה של v.
2) בצע push(v,w) אם ניתן.
אחרת
3) אם w אינו השכן האחרון ברשימה של v, קדם את המצביע של הקשת הנוכחית לשכן הבא.
4) אם w אחרון: עדכן את המצביע של הקשת הנוכחית לשכן הראשון, ובצע relabel(v).

טענה 4.1: בשורה (4) התנאים לביצוע relabel(v) מתקיימים.

תחזוקת קבוצת הצמתים הפעילים

v פעיל יכול להפוך ללא פעיל רק ע"י push/relabel(v)

Q = קב' הפעילים

בהתחלה $Q = \{v \in V \setminus \{s,t\} : c(s,v) > 0\}$

בכל פעולת $push(v,w)$: $insert(Q,w)$ (יתכן ש-w כבר פעיל).

ואם הדחיפה לא מרווה נבצע $delete(Q,v)$.

בכל פעולת push/relabel(v) השינוי ב-Q ממומש ב $O(1)$.

מסקנה 4.2: זמן הריצה של אלגוריתם push/relabel הוא

$$O(n\cdot m) + C\cdot \#\text{nonsaturating pushes} = O(n^2 m)$$

הוכחה: רשימת שכני v נסרקה בטרם הגענו לשורה 4.

בכל קידום של המצביע לקשת הנוכחית מ-w_i ל-w_{i+1} מובטח שמתקיים: $r_f(v,w_i)=0$ או $d(v) \le d(w_i)$.

אם relabel(v) לא אפשרי, משמע קיים שכן w_i ש"מפריע".

פורמלית: $r_f(v,w_i) > 0$ וגם $d(v) > d(w_i)$.

אם $r_f(v,w_i)=0$ בזמן הקידום של המצביע, כדי ש $r_f(v,w_i)>0$ בהגעה לשורה 4, משמע שבוצע בינתיים $push(w_i,v)$.

בזמן ה-push מתקיים $d(w_i) > d(v)$. ולכן בשורה (4) עדיין $d(v) < d(w_i)$.

אם $d(v) \le d(w_i)$ בזמן הקידום של המצביע, אזי $d(v)$ נשאר כאותו הערך בשורה (4) בעוד ש $d(w_i)$ לא ירד (ואולי עלה).

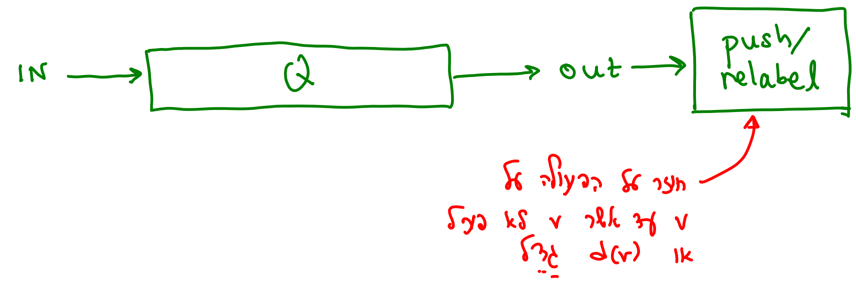
מסקנה: w_i אינו יכול להפריע לביצוע relabel(v). ∎

שיפור זמן הריצה של האלגוריתם

הרעיון המרכזי: קביעת מדיניות ניהול התור

ניתן להשיג סיבוכיות $O(n^3)$ במספר שיטות.

הפשוטה והבסיסית היא FIFO (first-in first-out).



הוכחה: נתמקד בצומת v, ונשאל: כמה פעמים נסרקת הרשימה של v? נשים לב שכל סריקה (למעט האחרונה) מסתיימת ב relabel(v), ולכן מס' הסריקות קטן מ $2n-1$.

אורך הרשימה הוא $deg(v)$, ולכן סה"כ מס' הקידומים של המצביע לקשת הנוכחית (לכל הצמתים) חסום ע"י

$$O(n \sum_v deg(v)) = O(n\cdot m).$$

רק בדחיפה מלאה מקדמים המצביע.

מס' הדחיפות המרוות $= O(nm)$ (נבלע בחישוב למעלה).

מס' הדחיפות הלא מרוות $= O(n^2 m)$.

כל הפעלה של push/relabel עלותה $O(1)$, מכאן המש"ל. ∎

השגרה מופעלת כל עוד $Q\neq\emptyset$.
שמורה: כל אברי Q הם צמתים פעילים.

Discharge(Q)

1) $v \leftarrow$ dequeue(Q)

2) repeat

3) push/relabel(v)

4) if w becomes active, then insert(Q,w)

5) until e(v) = 0 or d(v) increases.

6) if v active, then insert(Q,v)

הערה: ניתן להחליף שורה (5) ב- until e(v)=0

ניתוח האלג' כאשר Q מנוהל בשיטת FIFO

$Q_0=\{v\in V\setminus\{s,t\}: c(s,v)>0\}$

PASS 1: סדרת פעולות discharge שמבוצעות כל עוד התור מחזיק ברציפות צמתים שהיו בתור מאז האיתחול.

Q_1: קב' הפעילים בסוף PASS 1.

$v\in Q_1 \Leftrightarrow$ הוכנס לתור במהלך PASS-1.

בהינתן Q_i, נגדיר PASS (i+1) בתור סדרת פעולות discharge שמבוצעות החל מסוף PASS i כל עוד התור מכיל ברציפות צמתי Q_i.

טענה: מספר המעברים ע"פ התור $\le 4n^2$.

הוכחה: נגדיר $\Phi_i \triangleq \max\{d(v): v\in Q_i\}$.

כיצד מושפעת Φ ממעבר בודד על התור? $\Phi_{i+1} \stackrel{>}{\underset{=}{<}} \Phi_i$?

אם לא בוצעו פעולות relabel, הרי שבסוף הריצה כל צמת פעיל ב- Q_i הועבר לצמתים "נמוכים" יותר, ולכן הרמות של כל צמתי Q_{i+1} קטנים מ- Φ_i.

$\Leftarrow$ ירידה בערך של Φ. $(\Phi_{i+1} < \Phi_i)$.

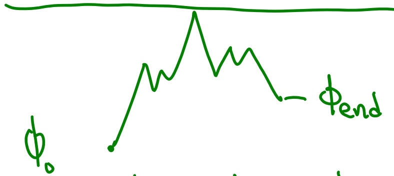
ולכן אם $\Phi_{i+1}\ge\Phi_i$, חייבת להתבצע relabel במהלך PASS(i+1). מס' פעולות relabel חסום ע"י $2n^2$, ולכן מס' מעברים שבהם $\Phi_{i+1}\ge\Phi_i$ גם חסום ע"י $2n^2$.

כעת נחסום את $|\{i \mid \Phi_{i+1}<\Phi_i\}|$.

$$\Delta^+ \triangleq \sum_{\{i:\Phi_{i+1}>\Phi_i\}} (\Phi_{i+1}-\Phi_i) \le \sum_{\text{פעולות relabel}} \underbrace{\left(d_{new}(v)-d_{old}(v)\right)}_{\text{הגדלה בגובה של v כתוצאה מפעולת relabel(v)}}$$

$$\le \sum_v \left(d_{max}(v)-d_0(v)\right) \le n\cdot 2n$$

מאידך, $|\{i: Q_{i+1}<\Phi_i\}| \le \underbrace{\sum_{\{i:\Phi_{i+1}<\Phi_i\}} (\Phi_i-\Phi_{i+1})}_{\Delta^-}$



$\Phi_{end}-\Phi_0 = \Delta^+ - \Delta^-$

$= \Delta^+ + \Phi_0 - \Phi_{end} \le 2n^2$

מסקנה: זמן הריצה של האלג' כאשר Q מנוהל בשיטת FIFO הוא $O(n^3)$.

שיטות נוספות:

- וריאציות שבהן חוזרים על push/relabel(v) מס' כלשהו של relabels או עד ש-$e(v)=0$.
- בחר צומת ב-Q בעל תוית גבוהה ביותר.
- wave method.

ניתן להבטיח את זמן הריצה $O(n\cdot m \lg \frac{n^2}{m})$ ע"י שימוש במבנה נתונים מתוחכמים.

מהו זמן הריצה הכרוך ב-$4n^2$ מעברים ע"פ התור?

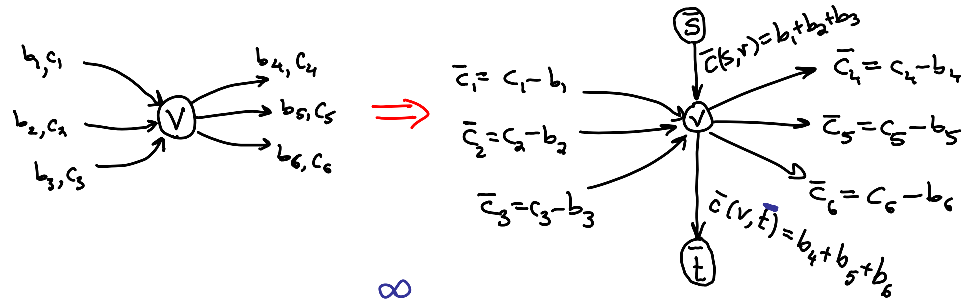
בכל הוצאה מהתור מבוצע push/relabel(v). נחלק למקרים:

(1) כל הפעולות למעט דחיפות לא מרוות.
(כולל קידום מצביעים לקשת נוכחית, relabel, דחיפות מרוות) חסום ע"י טענה 4.2 ע"י $O(nm)$, וזה חסום ע"י $O(n^3)$.

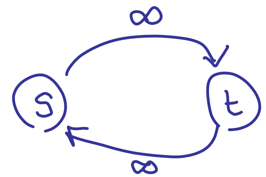
(2) דחיפות מרוות: אם מצומת יוצאת דחיפה לא מרווה, אז הוא מפסיק להיות פעיל, ולכן בכל מעבר יש לכל היותר דחיפה לא מרווה אחת מכל צומת.
מכאן שמס' הדחיפות הלא מרוות הוא $O(n^3)$.

רדוקציה: זרימה פיזיבילית עם חסמים תחתונים < זרימה מקס' רגילה

הוסף מקור $\bar{s}$ ובור $\bar{t}$. חבר כל $v\in V$: $(\bar{s},v)$, $(v,\bar{t})$
הגדר קיבולים $\bar{c}$ ברשת החדשה $\tilde{N}$.



ובנוסף



זרימה עם חסמים תחתונים

נשתמש בהגדרה הסטנדרטית של זרימה, ונוסיף אילוצים מהסוג $\forall e: f(e)\ge b(e)$

כעת, זרימת האפס אינה בהכרח מקיימת את האילוצים החדשים, ויש קושי במציאת זרימה פיזיבילית.
שאלות:

(1) איך מוצאים זרימה פיזיבילית בנוכחות חסמים תחתונים?

(2) איך מחשבים זרימה מקסימום?

טענה: קיימת זרימה פיזיבילית ב-N אםם קיימת זרימה מקסימום ב-$\bar{N}$ שמרווה את כל הקשתות היוצאות מ-$\bar{s}$.

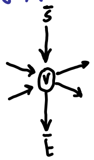
הוכחה: הכיוון הקל ($\Rightarrow$) תהי $\bar{f}$ זרימה מקס' ב-$\bar{N}$ שמרווה את קשתות $\delta(\{\bar{s}\})$. נגדיר לכל $e\in N$ נגדיר $f(e) \triangleq \bar{f}(e) + b(e)$.

כמובן $0 \le \bar{f}(e) \le \bar{c}(e) = c(e)-b(e) \Leftarrow b(e) \le f(e) \le c(e)$.

ומה לגבי אילוץ שמירת הזרימה?

$$\bar{f}_{in}(v) = f_{in}(v)$$
$$\bar{f}_{out}(v) = f_{out}(v)$$

הזרימה שנכנסת מ-$\bar{s}$ מוכנסת דרך קשתות $\bar{N}$
וכנ"ל לגבי היוצאות



הכיוון $\Leftarrow$: אם f פיזיבילית ב-N נבנה את הזרימה "ההפוכה"

לכל $e\in N$: $\bar{f}(e) \triangleq f(e) - b(e)$

$$\bar{f}(\bar{s},v) = \sum_{e\in in(v)} b(e) \quad \left(= \bar{c}(\bar{s},v) \right)$$

$$\bar{f}(v,\bar{t}) = \sum_{e\in out(v)} b(e)$$

* אילוצי קיבול מתקיימים בכל הקשתות.
* אילוצי שמירת זרימה מתקיימים בכל $v\in V\setminus\{s,t\}$
* "נתקן" את שמירת הזרימה ב-s וב-t באמצעות הקשתות ביניהם (בעלות קיבול ∞).
* קשתות החתך $\delta(\{\bar{s}\})$ רוויות. (ולכן $\bar{f}$ זרימה מקס'). □

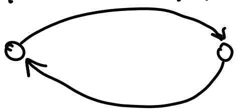
טענה: בה"כ לכל זוג צמתים (u,v): $\min\{b(u,v), b(v,u)\}=0$.

$b(e_1) \le c(e_1)$

$b(e_2) \le c(e_2)$

$\Downarrow$

$\bar{b}(e_1) \triangleq b(e_1)-b(e_2) \le \bar{c}(e_1) \triangleq c(e_1)-b(e_2)$



$\bar{b}(e_2)=0, \quad \bar{c}(e_2) \triangleq c(e_2)-b(e_2)$

הוכחה: נניח שלא, בה"כ

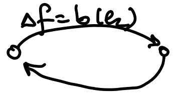
$b(e_1) \ge b(e_2)$

נחסיר $b(e_2)$ מכל הקשתות.

נחשב זרימה ברשת החדשה,

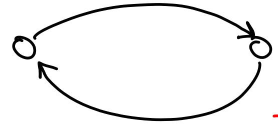
ואח"כ נוסיף מעגל

זרימה



רדוקציה לזרימה אי-סימטרית

$b(e_1) \le f(e_1) \le c(e_1)$

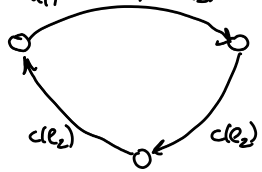


$c(e_2)$

$\Longrightarrow$

נפטר מקשתות אנטי-מקבילות

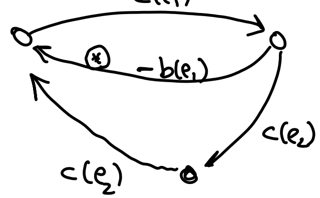
$b(e_1) \le f(e_1) \le c(e_2)$



$\Downarrow$

נפטר מחסמים תחתונים (נשתמש בקיבולים שליליים)
נעבור לזרימה אי-סימטרית

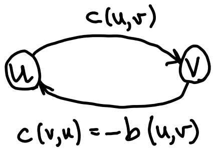
$$\left.\begin{array}{l} b(e_1) \le f(e_1) \\ \Leftrightarrow \\ -f(e_1) \le -b(e_1) \end{array}\right\} (*)$$



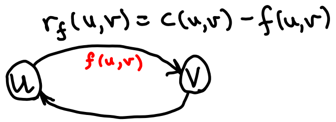
מציאת זרימה מקסימום עם חסמים תחתונים

נתבונן בזרימה אנטי-סימטרית:

$$r_f(u,v) \triangleq c(u,v) - f(u,v)$$



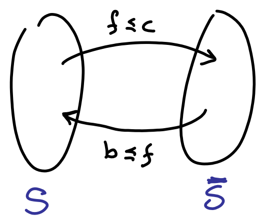
$$b(u,v) \le f(u,v) \le c(u,v)$$
$$\Updownarrow$$
$$-f(u,v) \le -b(u,v) \ \& \ f(u,v) \le c(u,v)$$



$$r_f(v,u) = f(u,v) - b(u,v)$$
$$= c(v,u) - f(v,u)$$

לכן הוספת חסמים תחתונים אינה משנה "דבר" למעט קיבולים שליליים.

חתכים בזרימה עם חסמים תחתונים



נגדיר מחדש קיבול של חתך:

$$c(S) \triangleq c(\delta(S)) - b(\delta(\bar{S}))$$

ונקבל אם קיימת זרימה מקסימום אז:

$$\max\left\{ |f| \;\middle|\; f \text{ זרימה עם חסמים תחתונים} \right\} = \min\left\{ c(S) \;\middle|\; \begin{array}{l} S \text{ חתך} \\ s \in S \\ t \notin S \end{array} \right\}$$

זרימה מינימום עם חסמים תחתונים

רדוקציה פשוטה לזרימה מקסימום: החלפת התפקידים של המקור והבור.

$$\max\left\{ |\bar{f}| \;\middle|\; \begin{array}{l} \bar{f} \text{ זרימה} \\ \text{מ-}t \text{ ל-}s \end{array} \right\} = -\min\left\{ |f| \;\middle|\; \begin{array}{l} f \text{ זרימה} \\ \text{מ-}s \text{ ל-}t \end{array} \right\}$$

לפי משפט: זרימה מקס' = חתך מינ': אם $\bar{f}$ זרימה מקס' מ-t ל-s אז קיים חתך $T \subseteq V$, $t \in T$, $s \notin T$ עבורו

$$|\bar{f}|_{t\to s} = c_{t\to s}(T) = c(\delta(T)) - b(\delta(\bar{T})).$$

כמובן $\bar{f}$ היא זרימה מינ' מ-s ל-t

$$|\bar{f}|_{s\to t} = -|\bar{f}|_{t\to s} = b(\delta(\bar{T})) - c(\delta(T))$$
$$= -\min\{c(\delta(T)) - b(\delta(\bar{T}))\}$$

מסקנה:

$$\min\left\{ |f| \;\middle|\; \begin{array}{l} f \text{ זרימה} \\ \text{מ-}s \text{ ל-}t \end{array} \right\} = \max_{\{S:\, s\in S,\, t\notin S\}} \{b(\delta(S)) - c(\delta(\bar{S}))\}$$

נגדיר עבור זרימה מינימום:

קיבול החתך $S \triangleq b(\delta(S)) - c(\delta(\bar{S}))$

ונקבל:

זרימה מינימום = חתך מקסימום.