אלגוריתמים ברשתות - 11/02/08

מציאת חתך מינימום (גלובלי) בגרף לא מכוון.

1 Nagamochi & Ibaraki - 92 (סיווג צמתים)

Stoer & Wagner - 94 (פישוט)

2 Karger - 93 (כיווץ אקראי)

חתך מינימום בגרף לא מכוון

הגדרה: גרף (לא מכוון) הוא K-קשיר בקשתות אם:

(1) הגרף נשאר קשיר גם אם מסירים K קשתות כלשהן

(2) קיימות K+1 קשתות שהסרתן הופכת את הגרף ללא קשיר.

משפט [Menger]: $G=(V,E)$ הוא K-קשיר בקשתות אם"ם ברשת N (הלא מכוונת) המתקבלת מ-G ע"י הגדרת $c(e)=1$ לכל קשת מתקיים:

$$K = \min\{ c(S) \mid \emptyset \subsetneq S \subsetneq V \}$$

חתך S המשיג מינ' $c(S)$ נקרא חתך מינימום גלובלי.

כיצד נחשבו?

שיטות לחישוב חתך מינימום (גלובלי)

(1) לפי הגדרה: לכל $\emptyset \subsetneq S \subsetneq V$, חשב את $c(S)$.

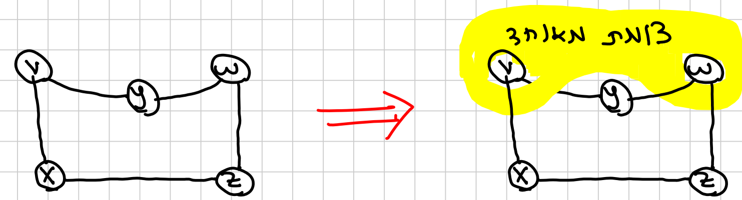
(2) לכל $s,t \in V$ (שונים), חשב חתך מינימום בין s ל-t. זמן ריצה: $\binom{n}{2}=O(n^2)$ חישובי חתך-(s,t) מינימום. $[O(n^5)]$.

(3) בחר $r \in V$ כלשהו. לכל $v \in V \setminus \{r\}$ חשב חתך מינימום בין r ל-v. זמן ריצה: $(n-1)$ חישובי חתך-(s,t) מינימום. $[O(n^4)]$

ננסה לשפר...

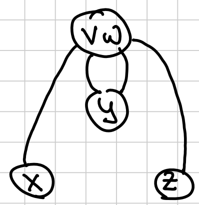
כיווץ זוג צמתים

פעולת הכיווץ מקבלת גרף לא מכוון $G=(V,E)$ וזוג צמתים $v,w \in V$ (לאו דווקא שכנים).



הערה: פעולת הכיווץ מייצרת גרף עם קשתות מקבילות. ברשת המתאימה הקיבול מציין את מס' הקשתות המקבילות.

שקול לגרף:



סימונים

$\lambda(G)$ - קיבול חתך מינימום גלובלי ב-G.

G_{vw} - הגרף המתקבל מכיווץ הזוג $\{v,w\}$ ב-G.

$\lambda(G,v,w)$ - קיבול חתך מינימום ב-G שאינו מפריד בין v ל-w.

$$\lambda(G,v,w) \triangleq \min\{ c(S) \mid \{v,w\} \subseteq S \subsetneq V \}$$

טענה: $\lambda(G,v,w) = \lambda(G_{vw})$

הוכחה: התאמה חח"ע ומשמרת קיבול בין חתכי G שאינם מפרידים בין v ל-w לבין חתכי G_{vw}.

טענה: $\lambda(G) = \min\{ \lambda(G_{vw}), st(G,v,w) \}$

אלגוריתם "משופר" לחישוב $\lambda(G)$:

```
min-cut(G)
    pick v ≠ w ∈ G
    Return ( MIN{ min-cut(G_vw), st(G,v,w) } )
```

מחושב ע"י הרצת אלג' לזרימה מקס'

אם הצמתים בשלב i הוא $n-i$ ולקח זמן

הריצה $O\left(\sum_{i=0}^{n-1} (n-i)^3\right) = O(n^4)$

ושיפרנו רק את הקבועים...

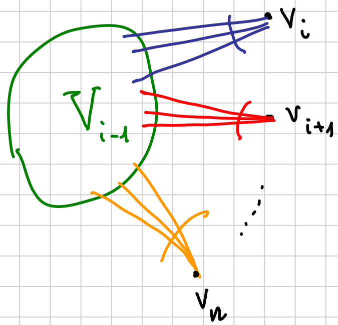
נניח $V=\{v_1,\dots,v_n\}$. נסמן $V_i=\{v_1,\dots,v_i\}$.

בהינתן פרמוטציה $\pi: V \longrightarrow V$, נסמן $\pi(V_i)=\{\pi(v_1),\dots,\pi(v_i)\}$.

הגדרה: פרמוטציה $\pi: V \to V$ של הצמתים נקראת חוקית אם מתקיים לכל $2 \le i < j \le n$:

$$c\big((\pi(v_i) \times V_{i-1}) \cap E\big) \ge c\big((\pi(v_j) \times V_{i-1}) \cap E\big)$$

כדי לפשט, נתעלם מ-π ונניח ש-$\{v_1,\dots,v_n\}$ הוא כבר סידור חוקי.



v_i מחובר הכי "חזק" ל-V_{i-1}.

ניתן למצוא סידור חוקי בזמן $O(n^2)$:

בהינתן V_{i-1} נחשב את v_i בזמן $O(n)$.

גם מימוש "מהיר" יותר (בזמן ששווה לזמן הריצה של האלג' של דייקסטרה למציאת מסלולים קצרים ביותר).

טענה: אם $\{v_1,\dots,v_n\}$ הוא סידור חוקי, אז

$$st(G, v_n, v_{n-1}) = c(\delta(\{v_n\}))$$

הוכחה בהמשך...

אלג' למציאת חתך מינימום גלובלי

(קריאה ראשונה $\text{min-cut}(G,c)$)

$\text{min-cut}(G, c)$

if $|V(G)| = 1$, return(∞)

$\{v_1,\dots,v_n\} \leftarrow$ Legal order of $V(G)$

Return($\text{MIN}\{\delta(\{v_n\}),\ \text{min-cut}(G_{v_{n-1}v_n}, c)\}$)

סיבוכיות: $T(n) \le O(n^2) + T(n-1)$

$\Leftarrow \quad T(n) = O(n^3)$ (ריצה בודדת של ערימה מקס׳)

נכונות האלגוריתם

נכונות נובעת מן הטענה המרכזית $\lambda(G,v_n,v_{n-1}) = c(\delta\{v_n\})$

כיון ש $\lambda(G) = \min\{st(G,v_{n-1},v_n),\ \lambda(G_{v_{n-1}v_n})\}$.

במהלך הוכחת הטענה המרכזית, נעזר בטענות הבאות:

טענה: לכל $p,q,r \in V$ מתקיים

$$st(G,p,q) \ge \text{MIN}\{st(G,p,r),\ st(G,q,r)\}$$

טענה: אם G' מתקבל מ-G ע"י השמטת צלעות אז:

$$st(G',v,w) \le st(G,v,w)$$

הוכחה $st(G,v_{n-1},v_n) = c(\delta(\{v_n\}))$

הוכחה באינדוקציה על $m+n$ $(|V|+|E|)$.

הבסיס עבור $m+n=2$ ברור.

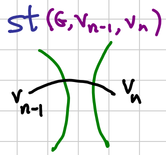
נחלק ל-2 מקרים: (I) $(v_{n-1},v_n)\in E$ (II) $(v_{n-1},v_n)\notin E$.

במקרה (I): יהי G' הגרף המתקבל ע"י השמטת הקשת (v_{n-1},v_n).

$$c(\delta(\{v_n\})) = c(\delta'(\{v_n\})) + c(v_{n-1},v_n)$$

(הנחת האינד') $= st(G',v_{n-1},v_n) + c(v_{n-1},v_n)$

(כי הסידור חוקי גם בG') $= st(G,v_{n-1},v_n)$



במקרה (II): $c(\delta(\{v_n\})) \ge st(G,v_n,v_{n-1})$

$$\ge \text{MIN}\{st(G,v_n,v_{n-2}),\ st(G,v_{n-1},v_{n-2})\}$$

ולכן מספיק להוכיח ש $c(\delta(\{v_n\}))$ אינו גדול מ-2 הביטויים ב MIN.

יהי G' הגרף המתקבל ע"י השמטת הצומת v_{n-1}.

נשים לב כי $\{v_1,v_2,\dots,v_{n-2},v_n\}$ הוא סידור חוקי של G'.

לפיכך:

$$c(\delta(\{v_n\})) = c(\delta'(\{v_n\}))$$

(הנחת האינד') $= st(G',v_n,v_{n-2})$

$$\le st(G,v_n,v_{n-2})$$

כעת נוכיח $c(\delta(\{v_n\})) \le st(G, v_{n-1}, v_{n-2})$.

יהי G'' הגרף המתקבל מ-G ע"י השמטת הצומת v_n.

נשים לב כי $\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$ הוא סידור תקין של G''.

לפיכך:

$$c(\delta(\{v_n\})) \le c(\delta(\{v_{n-1}\})) \quad \text{(תכונת הסידור)}$$

$$= st(G'', v_{n-1}, v_{n-2}) \quad \text{(הנחת האינד')}$$

$$\le st(G, v_{n-1}, v_{n-2}) \qquad \boxtimes$$

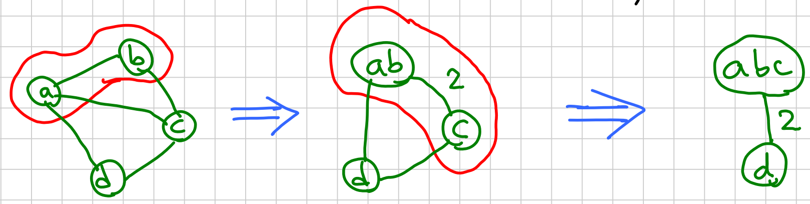
אלגוריתם כיווצים אקראיים למציאת חתך מינימום

Rand-min-cut(G)

If $|V(G)| = 2$ Return$(E(G))$

pick an edge $e \in E(G)$ with prob. $\frac{c(e)}{c(E)}$

Return(Rand-min-cut(G_e))



הערות:

① אם e כבדה, אז: לא תשתתף בחתך המחושב.

② אינטואיציה: להמנע מקשתות עם קיבול גבוה (כי להקטין את קיבול החתך). לכן קשת כבדה מקבלת עדיפות על פני קשת קלה.

③ לכל חתך $\delta(A)$ $(\emptyset \subsetneq A \subsetneq V)$ יש הסתב' חיובית שהוא יחושב ע"י האלגוריתם.

④ נרצה להוכיח: לכל חתך מינימום $\delta(A)$:

$$Pr(\text{אלג' מחזיר } \delta(A)) \ge \frac{1}{\binom{n}{2}} = \frac{2}{n(n-1)}$$

הגברת סיכוי ההצלחה Amplification

נניח ש $Pr(\text{אלג' מחזיר חתך מינ'}) \ge p = \frac{1}{n^c}$

אם נחזור על האלג' k פעמים, ונבחר את החתך הכי קטן מבין k הריצות, מה ההסתב' למציאת חתך מינימום?

$$Pr\left(\bigcup_{i=1}^{k} \text{אלג' מוצא חתך מינ' בריצה ה-}i\right) = 1 - Pr\left(\bigcap_{i=1}^{k} \text{אלג' נכשל במציאת חתך מינ' בריצה } i\right)$$

$$= 1 - \prod_{i=1}^{k} Pr(\text{אלג' נכשל בריצה } i)$$

$$\ge 1 - (1-p)^k \ge 1 - e^{-pk}$$

עבור $k = \frac{1}{p}$ נקבל $1 - \frac{1}{e}$, עבור $k = \frac{\ln n}{p}$ נקבל $1 - \frac{1}{n}$, עבור $k = \frac{n}{p}$ נקבל $1 - e^{-n}$.

משפט: אם $\delta(A)$ הוא חתך מינימום, אזי

$$\Pr(\text{אלג' מחזיר } \delta(A)) \ge \frac{1}{\binom{n}{2}}$$

הוכחה: נסמן ב-$\{e_1,\dots,e_{n-2}\}$ את סדרת הקשתות שהאלג' בוחר לכווץ.

נסמן ב-$X_i \triangleq$ המאורע ש $e_i \notin \delta(A)$.

$$\Pr(\text{אלג' מחזיר } \delta(A)) = \Pr\left(\bigcap_{i=1}^{n-2} X_i\right)$$

$$= \Pr(X_1)\cdot\Pr(X_2|X_1)\cdots\Pr(X_{n-2}|X_1\cdots X_{n-3})$$

נראה ש $\Pr(X_1) \ge 1-\frac{2}{n}$. (*)

נסמן $k=c(\delta(A))$. לכל v מתקיים $c(\delta(\{v\}))\ge k$

ולכן $c(E)\ge \frac{1}{2}kn$. ולכן

$$\Pr(\bar{X}_1) = \frac{c(\delta(A))}{c(E)} \le \frac{k}{\frac{1}{2}kn} = \frac{2}{n}.$$

נראה ש $\Pr(X_{i+1} | X_1\wedge X_2\wedge\cdots\wedge X_i) \ge 1-\frac{2}{n-i}$ (**)

אחרי כיווץ $e_1,\dots,e_i$ חתך המינימום נשאר בקיבול k.

מאידך, מספר הצמתים ירד ל-$(n-i)$ ולכן

$\Pr(\bar{X}_{i+1} | X_1\wedge\cdots\wedge X_i) \le \frac{2}{n-i}$.

מסקנה:

$$\Pr(\text{אלג' מחזיר } \delta(A)) = \Pr(X_1)\cdot\Pr(X_2|X_1)\cdots\Pr(X_{n-2}|X_1\cdots X_{n-2})$$

$$\ge \left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n-1}\right)\cdots\left(1-\frac{2}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{\cancel{n-2}}{n}\right)\cdot\left(\frac{\cancel{n-3}}{n-1}\right)\cdot\left(\frac{\cancel{n-4}}{\cancel{n-2}}\right)\cdots\left(\frac{2}{\cancel{4}}\right)\left(\frac{1}{\cancel{3}}\right)$$

$$= \frac{2}{n(n-1)}$$

☒

מסקנה: מס' החתכים השונים בעלי קיבול מינימום חסום ע"י $\binom{n}{2}$.

(מה מספרם בגרף מעגל? האם יש גרף לא מעגל עם $\binom{n}{2}$ חתכי מינימום?)

זמן הריצה:

ריצה בודדת $O(n^2)$.

צריך לפחות n^2 ריצות $\Leftarrow$ לא יותר יעיל מריצה אחת של זרימה מקס'.

נשים לב $\Pr(X_1)\ge 1-\frac{2}{n}$, ועבור $i<\frac{n}{2}$

$$\Pr(X_{i+1}|X_1\cdots X_i) \ge 1-\frac{4}{n}$$

מאידך בסוף הסיכוי להצלחה נופל ל-$\frac{1}{3}$.

Karger & Stein הורידו את זמן הריצה ל-$O(n^2\lg n)$ על בסיס האבחנה הבאה:

① בצע $\frac{n}{2}$ כיווצים כמו קודם.

② בצע 2 ריצות בת"ל על הגרף הנותר,
ובחר בטוב מן השניים.

(נעיר כי $\frac{n}{2}$ אינה בחירה אופטימלית לפיצול).